الدكتور شيرزاد الطالباني
أستاذ محاضر في معهد
الرياضيات ـ جامعة قسنطينة

الدكتورة نازدار اسماعيل
أستاذة مساعدة في معهد
الرياضيات ـ جامعة قسنطينة

محاضرات في الجبر الخطي

الطبعة الثالثة 1989

ديوان المطبوعات الجامعية
الجزائر

مقدمة

تتناول فصول هذا الكتاب بعض مواضيع الجبر الخطي التي ارتأينا ضرورتها لطلبة الجامعات ، ونأمل أن يساعد هذا الكتاب على تلافي بعض الفراغ في المكتبة العربية في هذا الميدان النظري الأساسي . سيكون الاهتمام الاكثر مركزاً على الجانب النظري ، حيث نتعرض بالتفصيل لمجموعة كبيرة من النظريات في كل موضوع من مواضيع الكتاب مرفوقة بالبراهين التفصيلية مع أمثلة توضيحية مناسبة لكثير من التعاريف والنظريات من اجل تسهيل فهمها . في نهاية كل فصل قدمنا مجموعة من التمارين ، ينبغي حلها من اجل تمهيد الطريق لفهم الفصول اللاحقة .

الكتاب موجه لدارسين يتمتعون بحد مناسب من المعرفة لبعض المبادئ الاولية في الجبر بالأخص : المجموعات ، العلاقات التطبيقات ، العمليات ، الزمر ، الحلقات والحقول ، ومع ذلك نعرض لبعض تلك المفاهيم الضرورية في التمهيد .

سيكون من دواعي سرورنا وأمتناننا ان نتلقى ملاحظات الزملاء والطلبة لبغية تحسين هذا الكتاب في طبعاته اللاحقة . نقدم شكرنا الخاص للدكتور مرعي غانم للمساعدة القيمة التي قدمها لنا في صياغة وتنقيح لبعض الجوانب اللغوية من هذا الكتاب .

د. شيرزاد الطالباني   د. نازدار اسماعيل

قسنطينة في 14 - 02 - 1987

المحتويات

- تمهيد -

سنرمز للمجموعات بالأحرف اللاتينية الكبيرة A ، B ... الخ ولعناصر المجموعة بالأحرف a ، b ، ... الخ .

الزوج المرتب ذات العنصر الاول a ، والعنصر الثاني b ، نرمز له ب : (a,b) .
ومجموعة جميع الأزواج المرتبة (a,b) عندما $a \in A$ و $b \in A$ ، نرمز لها ب $A \times B$ ونسميها بالجداء الديكارتي للمجموعتين A ، B .

العلاقة R في المجموعة A هي اي مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $A \times A$. ونقول أن العلاقة R في المجموعة A هي :

(1) انعكاسية : إذا كانت لكل $a \in A$ ، aRa .

(2) تناظرية : إذا كانت لكل $a,b \in A$ ، aRb فأن bRa .

(3) متعدية : إذا كانت لكل $a,b,c \in A$ ، aRb و bRc فأن aRc .

العلاقة التي تحقق (1) ، (2) و (3) تسمى علاقة تكافؤ .

التطبيق f من المجموعة A في المجموعة B ، والذي نرمز له بالرمز $f : A \rightarrow B$ هو عملية ربط كل عنصر $a \in A$ لعنصر وحيد $b \in B$ يسمى بصورة العنصر $a \in A$ وفق التطبيق f ، ونكتب $f(a)=b$. ونرمز للتطبيقات بالرمز f ، g ، h ... الخ .

إذا كان $f: A \rightarrow B$ تطبيقاً ، فأن صورة المجموعة الجزئية $A_1 \subset A$ وفق التطبيق f نرمز لها ب $f(A_1)$ وعبارة عن :

$$f(A_1) = \{ b \in B \ ; \ \exists \, a \in A_1 \ , \ f(a) = b \}$$

والصورة العكسية للمجموعة الجزئية $B_1 \subset B$ وفق التطبيق f

نرمز لها بالرمز $f^{-1}(B)$ ، عبارة عن ، $f^{-1}(B)=\{a\in A : f(a)\in B_1\}$

إذا كان $f:A\to B$ ، $f(A)=B$ عندئذ نقول ان f عبارة عن تطبيق غامر من المجموعة A على المجموعة B ، ونقول عن f انه متباين إذا تحقق ، لكل $a,b\in A$ إذا كان $f(a)=f(b)$ فأن $a=b$ أو بالعكس، إذا كان $a\neq b$ فأن $f(a)\neq f(b)$. التطبيق المتباين والغامر نسميه بالتطبيق التقابلي .

التطبيق $f:A\to A$ والمعرف ب: لكل $a\in A$ ، $f(a)=a$ نسميه بالتطبيق المطابق (أو الحيادي) ونرمز له بالرمز Id_A .

يتساوى التطبيقان $f,g:A\to B$ إذا كان لكل $a\in A$ ، $f(a)=g(a)$.

إذا كان $f:A\to B$ ، $g:B\to C$ تطبيقين ، فأن التطبيق $h:A\to C$ والذي يحقق: انه لكل $a\in A$ ، $h(a)=g(f(a))$ يسمى بتركيب التطبيقين f ، g ، ونرمز لذلك ب $g\circ f$ اي ان :

$$\forall a\in A \ , \quad h(a)=(g\circ f)(a)=g(f(a))$$

إذا كان $f:A\to B$ تطبيقاً تقابلياً ، فأنه يوجد تطبيق وحيد $g:B\to A$ بحيث $f\circ g=Id_B$ ، $g\circ f=Id_A$ ، نسميه بالتطبيق العكسي للتطبيق f ونرمز له ب : f^{-1} ، ويكون لدينا ،

$$f^{-1}(b)=a \Leftrightarrow f(a)=b$$

العملية الداخلية في المجموعة A ، (سنكتب للاختصار العملية في A) هي كل تطبيق من $A\times A$ في A .

والعملية الخارجية على المجموعة A بالنسبة للمجموعة B، هي كل تطبيق من $B\times A$ في A .

نعرف الزمرة بأنها مجموعة غير خالية G، ذات عملية داخلية ولتكن *، بحيث تتحقق الشروط التالية :-

(1) العملية * تجميعية في المجموعة G أي انه :

$\forall a,b,c \in G \quad , \quad a*(b*c) = (a*b)*c$

(2) يوجد عنصر حيادي e بالنسبة للعملية * في المجموعة G أي انه :

$\exists e \in G \; , \forall a \in G \quad . \quad a*e = e*a = a$

(3) لكل $a \in G$ يوجد عنصر نظير $a' \in G$ بالنسبة للعملية * في المجموعة G، اي انه :

$\forall a \in G \;\; \exists a' \in G \quad , \quad a*a' = a'*a = e$

ونقول عندئذ ان $(G,*)$ زمرة . ونقول ان $(G,*)$ زمرة تبديلية اذا كانت العملية * تبديلية في G، اي انه :

$\forall a,b \in G \quad ; \quad a*b = b*a$

سنرمز للعملية * في الزمرة في هذا الكتاب بالجمع وبذلك يكون العنصر الحيادي هو "0" ولنظير العنصر a هو $-a$.

الزمرة الجزئية في الزمرة $(G,+)$ هي مجموعة جزئية غير خالية ولتكن H من الزمرة $(G,+)$، بحيث ان $(H,+)$ هي نفسها زمرة، اي ان الزمرة الجزئية في الزمرة G هي مجموعة جزئية غير خالية H، بحيث ان H هي زمرة بالنسبة لنفس العملية في G .

نعرف الحلقة بأنها مجموعة غير خالية R ذات عمليتين داخليتين، نرمز للأولى بالجمع، وللثانية بالضرب، بحيث يكون $(R,+)$ زمرة تبديلية ، وتكون عملية الضرب تجميعية في R وتوزيعية بالنسبة للجمع .

إذا وجد عنصر حيادي بالنسبة للضرب في R نرمز له ب 1 ، ونقول ان $(R,+,\cdot)$ حلقة ذات عنصر حيادي . وإذا كانت عملية الضرب تبديلية في R عندئذ نقول ان الحلقة R هي حلقة تبديلية .

إذا كانت في الحلقة التبديلية ذات العنصر الحيادي R تتحقق الخاصية انه لكل $a,b \in R$ إذا كان $ab=0$ فأن $a=0$ أو $b=0$. (وهذا الشرط يكافئ الشرط انه إذا كان $a \neq 0$ و $b \neq 0$ فأن $ab \neq 0$) عندئذ نقول أن الحلقة R هي حلقة تامة .

نعرف الحقل بأنه الحلقة التامة K والتي يتحقق انه لكل $0 \neq a \in K$ يوجد $0 \neq a' \in K$ بحيث انه $aa' = a'a = 1$. اي انه لكل عنصر من K مختلف عن الصفر نظيراً بالنسبة لعملية الضرب. أي انه $(K,+)$ زمرة تبديلية و $(K \setminus \{0\},\cdot)$ زمرة تبديلية .

الفصل الاول
الفضاء الشعاعي

1.1 خواص أولية

1.1.1 تعريف

ليكن K حقلاً ، V مجموعة غير خالية ، نقول ان V هو فضاء شعاعي على الحقل K إذا تحقق الشرطان التاليان:

(1) إذا كان $(V, +)$ زمرة تبديلية ،

(2) إذا وجد تطبيق الجداء الديكارتي $K \times V$ في V بحيث يشارك كل زوج مرتب $(\lambda, x) \in K \times V$ بعنصر من V ندل عليه بالرمز λx ، ويحقق الخواص التالية :

(a) $\forall \lambda, \mu \in K \;, \forall x \in V \;, (\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$

(b) $\forall \lambda \in K \;, \forall x, y \in V \;, \lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$

(c) $\forall \lambda, \mu \in K \;, \forall x \in V \;, \lambda (\mu x) = (\lambda \mu) x$

(d) $\forall x \in V \;, 1 . x = x$

حيث 1 هو العنصر الحيادي في الحقل K . تسمى عناصر V بالأشعة ، وعناصر K مقادير سلمية ، ويسمى التطبيق $(\lambda, x) \to \lambda x$ ضرب الشعاع x بالمقدار السلمي λ .

2.1.1 أمثلة :

(1) مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$، هي فضاء شعاعي على حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

(2) مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، هي فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$.

(3) $\mathbb{R}^2$ هي فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$ ، لأن $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ أي $\mathbb{R}^2$ هي زمرة ابلية بالنسبة لعملية جمع الأزواج المرتبة ، ونعرف الضرب بمقدار سلمي كمايلي :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \ , \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

يحقق جميع خواص الفضاء الشعاعي .

ويمكن تعميم المثال السابق على $\mathbb{R}^n$. في المجموعة $\mathbb{R}^n$ نعرف عملية الجمع كمايلي :

$$\forall (x_1,\dots,x_n) , (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n , \ (x_1,\dots,x_n) + (y_1,\dots,y_n) = \\ = (x_1+y_1 , \dots\dots , x_n+y_n)$$

ونعرف الضرب بمقدار سلمي كمايلي :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \ , \ \forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \ , \ \lambda(x_1,\dots,x_n) = (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$$

نلاحظ ان $(\mathbb{R}^n,+)$ زمرة تبديلية ، والضرب بمقدار سلمي يحقق جميع خواص الفضاء الشعاعي .

(4) ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K . نعرف عملية الجمع في $V_1 \times V_2$ كمايلي :

$$\forall (x,y) , (x_1,y_1) \in V_1\times V_2 , \ (x,y)+(x_1,y_1) = (x+x_1 , y+y_1)$$

من الواضح ان $(V_1\times V_2 , +)$ زمرة تبديلية .

ونعرف الضرب بمقدار سلمي كما يلي :

$$\forall \lambda \in K \ , \ \forall (x,y) \in V_1 \times V_2 \ , \ \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

يحقق جميع خواص الفضاء الشعاعي . فإن $V_1 \times V_2$ هو فضاء شعاعي على الحقل K ، يسمى بالجداء الديكارتي للفضاءين V_1 ، V_2 .

3.1.1 قواعد الحساب في الفضاء الشعاعي

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K .

(1) نرمز للعنصر الحيادي في الزمرة $(V,+)$ بالرمز 0_V ، ونسميه الشعاع الصفري ، فإنه لأي $\lambda \in K$ ، $\lambda . 0_V = 0_V$ ، لأنه :-

$$\forall v \in V \ , \ \lambda . 0_V = \lambda . 0_V + 0_V = \lambda . 0_V + ((\lambda v) + (-(\lambda v))) =$$
$$= (\lambda . 0_V + \lambda v) + (-(\lambda v)) = \lambda(0_V + v) + (-(\lambda v)) =$$
$$= \lambda v + (-(\lambda v)) = 0_V$$

(2) نرمز للعنصر الحيادي بالنسبة للجمع في الحقل K بالرمز 0_K ، فإنه لكل $v \in V$ ، $0_K . v = 0_V$ ، لأنه :-

$$0_K . v = 0_K . v + 0_V = 0_K . v + (v + (-v)) = (0_K . v + 1.v) + (-v) =$$
$$= (0_K + 1) v + (-v) = 1.v + (-v) = v + (-v) = 0_V$$

(3) لكل $v \in V$ ، $(-1)v = -v$ ، لأنه :

$$(-1)v = (-1)v + 0_V = (-1)v + (v + (-v)) = ((-1)v + 1.v) + (-v) =$$
$$= ((-1) + 1) v + (-v) = 0_K . v + (-v) = 0_V + (-v) = -v$$

(4) لكل $\lambda \in K$ بحيث $\lambda \neq 0_K$ ولكل $v \in V$ إذا كان $\lambda v = 0_V$ فإن : $v = 0_V$.

لنفرض $\lambda v = 0_V$ فأنه يوجد λ^{-1} في الحقل K ،

$$v = 1 \cdot v = (\lambda^{-1}\lambda)v = \lambda^{-1}(\lambda v) = \lambda^{-1} \cdot 0_V = 0_V$$

(5) لكل $v_1, v_2, v_3 \in V$ إذا كان $v_1 + v_3 = v_2 + v_3$ فأن : $v_1 = v_2$.

$$v_1 = v_1 + (v_3 + (-v_3)) = (v_1 + v_3) + (-v_3) = (v_2 + v_3) + (-v_3) =$$
$$= v_2 + (v_3 + (-v_3)) = v_2$$

ونقول ان كل عنصر منتظم بالنسبة للجمع في الفضاء الشعاعي V.

(6) لكل $v_1, v_2 \in V$ نعرف $v_1 - v_2 = v_1 + (-v_2)$ فأنه:

$$\forall \lambda \in K, \forall v \in V, (-\lambda)v = -\lambda v = \lambda(-v)$$

$$\lambda(-v) = \lambda(-v) + ((\lambda v) + (-\lambda v)) = (\lambda(-v) + \lambda v) + (-\lambda v) =$$
$$= \lambda((-v) + v) + (-\lambda v) = \lambda \cdot 0_V + (-\lambda v) = 0_V + (-\lambda v) =$$
$$= -\lambda v$$

$$(-\lambda)v = (-\lambda)v + (\lambda v + (-\lambda v)) = ((-\lambda)v + \lambda v) + (-\lambda v) =$$
$$= ((-\lambda) + \lambda)v + (-\lambda v) = 0_K \cdot v + (-\lambda v) = 0_V + (-\lambda v) =$$
$$= -\lambda v$$

ملاحظة

أعتباراً من الآن نستخدم "0" بدلاً عن كل من 0_K ، 0_V . وعلى القارئ أن يميز إذا كان مقداراً سلمياً أو شعاعاً .

٢.١ الفضاء الشعاعي الجزئي

١.٢.١ تعريف

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K، ولتكن F مجموعة جزئية غير خالية من V. نسمي F فضاءً شعاعياً جزئياً من الفضاء الشعاعي V، إذا كان F فضاءً شعاعياً بالنسبة لنفس العمليتين في V (اي الجمع في V والضرب بمقدار سلمي في K). اي انه إذا كان $(F, +)$ زمرة جزئية من الزمرة $(V, +)$ وكذلك لكل $\lambda \in K$، ولكل $v \in V$ يكون $\lambda v \in F$، وتتحقق الشروط من (a) الى (d) المذكورة في (١.١.١).

٢.٢.١ نظرية

لتكن F مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء الشعاعي V على الحقل K. فأن F تكون فضاءً شعاعياً جزئياً إذا وفقط إذا كانت :

$$\forall v_1, v_2 \in F \ , \quad v_1 - v_2 \in F \qquad (1)$$

$$\forall v_1 \in F, \ \forall \lambda \in K \ , \quad \lambda v_1 \in F \qquad (2)$$

البرهان :

إذا كان F فضاءً شعاعياً جزئياً، عندئذ $(F, +)$ زمرة جزئية من الزمرة $(V, +)$، اي انه لكل $v_1, v_2 \in F$ فأن $-v_2 \in F$، ومنه $v_1 - v_2 = v_1 + (-v_2) \in F$. ومن خواص الفضاء الشعاعي الجزئي انه يوجد التطبيق $f : K \times F \rightarrow F$ بحيث لكل $v_1 \in F$ ولكل $\lambda \in K$

$f(\lambda, v_1) = \lambda v_1$ اي انه يتحقق الشرط الثاني .

للبرهان على العكس ، باستخدام الشرط الأول لكل $v \in F$ فأن $0 = v - v \in F$. وكذلك لكل $v \in F$ ، بما ان $0 \in F$ فأن $-v = 0 - v \in F$. واخيراً لكل $v_1, v_2 \in F$ فأن $-v_2 \in F$ ومنه $v_1 + v_2 = v_1 - (-v_2) \in F$. نستنتج ان F هي زمرة بالنسبة لنفس العملية في V ، وبما انه محتواة في V فأن F هي زمرة جزئية من V . ومن الشرط الثاني نستنتج انه لكل $v_1 \in F$ ولكل $\lambda \in K$ فأن $\lambda v_1 \in F$ ، ومن هنا فأن جميع الشروط من (a) الى (d) تتحقق ، اي ان F هو فضاء شعاعي على الحقل K ، وهي مجموعة جزئية من V ، فأن F فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي V.

(و.هـ.م.)

3.2.1 نتيجة

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، ولتكن F مجموعة جزئية غير خالية من V . فأن F تكون فضاءاً شعاعياً جزئياً من الفضاء الشعاعي V $\Longleftrightarrow$ $\forall \lambda, \mu \in K, \forall v_1, v_2 \in F, (\lambda v_1 + \mu v_2) \in F$

من هنا نلاحظ انه : $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K, \forall v_1, \dots, v_n \in F, (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \in F$

4.2.1 أمثلة

(1) $\{0_V\}$ والمجموعة V هما فضاءان شعاعيان جزئيان من كل فضاء شعاعي V على الحقل K . الفضاء الشعاعي الجزئي الذي يختلف عن $\{0_V\}$ و V يسمى بالفضاء الشعاعي الجزئي الحقيقي .

(٢) لتكن $\mathbb{R}^2$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$ ، فأن المجموعة الجزئية $A=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 \; ; \; x\in\mathbb{R}\}$ هي فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^2$.

5.2.1 نظرية

لتكن $\{F_i\}_{i\in I}$ أسرة فضاءات شعاعية جزئية من الفضاء الشعاعي V على الحقل K ، و $F=\bigcap_{i\in I} F_i$. فأن F عبارة عن فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي V .

البرهان :

بما أنه لكل $i\in I$ ، F_i عبارة عن فضاء شعاعي جزئي من V ، فأن $0\in F_i$ لكل $i\in I$ ، ومنه $0\in F=\bigcap_{i\in I} F_i$. ليكن $x_1,x_2\in F$ فأنه $x_1\in F_i$ و $x_2\in F_i$ لكل $i\in I$. بما ان F_i هي فضاء شعاعي جزئي من V لكل $i\in I$ ، فأن $x_1-x_2\in F_i$ لكل $i\in I$ حسب النظرية (2.2.1) ، أي ان $x_1-x_2\in F=\bigcap_{i\in I} F_i$. لكل $\lambda\in K$ ولكل $x\in F$ فأن $x\in F_i$ لكل $i\in I$. بما أن F_i هي فضاء شعاعي جزئي من V لكل $i\in I$ ، فأن $\lambda x\in F_i$ لكل $i\in I$ حسب النظرية (2.2.1) ، اي ان $\lambda x\in F$ ، فأن $F=\bigcap_{i\in I} F_i$ عبارة عن فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V . (و.هـ.م)

من الجدير بالذكر ان اتحاد فضاءين شعاعيين جزئيين ليس بشكل عام فضاءً شعاعياً جزئياً .

فمثلاً في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ على الحقل $\mathbb{R}$ ، لتكن
$F_1 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 ; x \in \mathbb{R}\}$ ، $F_2 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 ; y \in \mathbb{R}\}$ فضاءين
شعاعيين جزئيين من $\mathbb{R}^2$ ، فأن $F_1 \cup F_2$ لايكون فضاءً
شعاعياً جزئياً من $\mathbb{R}^2$ ، لأنه مثلاً $(3,0) \in F_1$ و $(0,2) \in F_2$
فأن $(3,0) \in F_1 \cup F_2$ و $(0,2) \in F_1 \cup F_2$ ، عندنا $(0,2) + (3,0) = (3,2)$
لكن $(3,2) \notin F_1 \cup F_2$.

3.1 جمع الفضاءات الشعاعية

1.3.1 نظرية

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين جزئيين
من الفضاء الشعاعي V على الحقل K ، فأن
$V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_1 \wedge v_2 \in V_2\}$ هو فضاء
شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي V .

البرهان :

لكل $x, y \in V_1 + V_2$ فأنه توجد $v_1, v_1' \in V_1$ و $v_2, v_2' \in V_2$
بحيث $x = v_1 + v_2$ ، $y = v_1' + v_2'$ فأن :

$$x - y = v_1 + v_2 - (v_1' + v_2') = (v_1 - v_1') + (v_2 - v_2')$$

بما أن V_1 ، V_2 فضاءان شعاعيان جزئيان من V ،
فأنه حسب النظرية (2.2.1) ، $v_1 - v_1' \in V_1$ و $v_2 - v_2' \in V_2$
فأن $x - y \in V_1 + V_2$.
لكل $\lambda \in K$ ولكل $x \in V_1 + V_2$ ، فأن $x = v_1 + v_2$ حيث

$v_1 \in V_1$ و $v_2 \in V_2$ فأن : $\lambda x = \lambda(v_1+v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$

لكن حسب النظرية (2.2.1) $\lambda v_1 \in V_1$ ، $\lambda v_2 \in V_2$ لأن

V_1 ، V_2 فضاءان شعاعيان جزئيان من V ، فأن

$\lambda x \in V_1+V_2$ ، فأنه لذلك $V_1 + V_2$ هو فضاء

شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي V على الحقل K .

(و . هـ . م)

2.3.1 تعريف

نسمي الفضاء الشعاعي الجزئي V_1+V_2 من النظرية (1.3.1)، مجموع الفضائين الشعاعيين الجزئيين V_1 ، V_2 ،
ويمكن تعميم هذا التعريف الى جمع n من الفضاءات الشعاعية الجزئية ، ليكن $V_1, \ldots, V_n$ فضاءات شعاعية جزئية من الفضاء الشعاعي V على الحقل K ، فأن $V_1+\cdots+V_n$ هو فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V ، يسمى بمجموع الفضاءات الشعاعية الجزئية $V_1, \ldots, V_n$.

3.3.1 نظرية

ليكن $V_1, \ldots, V_n$ ($n \geqslant 2$) فضاءات شعاعية جزئية من الفضاء الشعاعي V على الحقل K ، فأن الشرطين التاليين متكافئان :

(1) $$V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots + V_n) = \{0\}$$

(2) إذا كان $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ ،

$a_i , b_i \in V_i$ لأي $i = 1, \dots, n$ فأن $a_j = b_j$ $(j = 1, \dots, n)$

البرهان :

نفرض (1) صحيحة ، وليكن $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$

حيث $a_i , b_i \in V_i$ لأي $i = 1, \dots, n$ ، ولأي $1 \leq j \leq n$ فأن :

$$a_j - b_j = (b_1 - a_1) + \dots + (b_{j-1} - a_{j-1}) + (b_{j+1} - a_{j+1}) + \dots + (b_n - a_n)$$

وبما أن $a_i , b_i \in V_i$ لأي $i = 1, \dots, n$ و V_i هو فضاء شعاعي جزئي من V ، فأن $b_i - a_i \in V_i$ أي أن :

$$a_j - b_j \in V_j \cap (V_1 + \dots + V_{j-1} + V_{j+1} + \dots + V_n)$$

لكن حسب الشرط الاول

$$V_j \cap (V_1 + \dots + V_{j-1} + V_{j+1} + \dots + V_n) = \{0\}$$

إذن $a_j - b_j = 0$ ، ومنه $a_j = b_j$ لأي $j = 1, \dots, n$.

نفرض (2) صحيحة ، ولنفرض ان

$$V_i \cap (V_1 + \dots + V_{i-1} + V_{i+1} + \dots + V_n) \neq \{0\}$$

ليكن $a \in V_i \cap (V_1 + \dots + V_{i-1} + V_{i+1} + \dots + V_n)$

فأن $a \in V_i$ وكذلك $a \in V_1 + \dots + V_{i-1} + V_{i+1} + \dots + V_n$

فأن : $a = a_1 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_n$

حيث $a_j \in V_j$ لكل $j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ من هنا نستنتج ان :

$$a_1 + \dots + a_{i-1} + (-a) + a_{i+1} + \dots + a_n = 0 + \dots + 0$$

من (2) نستنتج أن : $a_1 = 0, \dots, a_{i-1} = 0 , -a = 0 , a_{i+1} = 0, \dots, a_n = 0$

أي أن $a = 0$.

(و . هـ . م .)

4.3.1 تعريف

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، وليكن V_1 ، ... ، V_n فضاءات شعاعية جزئية من الفضاء الشعاعي V . نقول ان الفضاء الشعاعي V هو المجموع المباشر للفضاءات الشعاعية الجزئية V_1 ، V_2 ، ... ، V_n اذا كانت :

(1) $V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

(2) اذا تحققت احد شرطي النظرية (3.3.1)

عندئذ نكتب $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$.

4.1 الارتباط الخطي والاستقلال الخطي

1.4.1 تعريف

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، ولتكن $v_1 , \ldots , v_n$ أشعة ما من V ، $\alpha_1 , \ldots , \alpha_n$ مقادير سلمية من الحقل K . فأن الشعاع $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ يسمى مزجاً خطياً للأشعة $v_1 , v_2 , \ldots , v_n$. ونقول أن الفضاء الشعاعي V مولد بالأشعة $v_1 , \ldots , v_n$ ، اذا كان كل شعاع $v \in V$ ، هو مزجاً خطياً للأشعة $v_1 , \ldots , v_n$.

2.4.1 مثال

لتكن $v_1 = (1,1,1)$ ، $v_2 = (1,2,3)$ ، $v_3 = (2,-1,1)$ اشعة ما من الفضاء الشعاعي IR^3 على الحقل IR ، فأن الشعاع $v = (1 ، -2 ، 2)$ عبارة عن مزج خطي للأشعة v_1 ، v_2 ، v_3 .

3.4.1 نظرية

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، ولتكن $A=\{v_1,\ldots,v_p\}$ مجموعة من الاشعة من V . فإن مجموعة جميع المزوج الخطية B للأشعة $v_1,\ldots,v_p$ ، هي فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V ، وهو اصغر فضاء شعاعي جزئي من V ، يحوي المجموعة A .

البرهان :

نلاحظ $B=\{v\in V;\ v=\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_p v_p\ ,\ \alpha_i\in K\}$

$\forall u,v\in B\ ;\ u=\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_p v_p\ ,\ v=\beta_1 v_1+\cdots+\beta_p v_p$

حيث $\alpha_i,\beta_i\in K$ لأي $i=1,2,\ldots,p$.

فإن : $u-v=(\alpha_1-\beta_1)v_1+\cdots+(\alpha_p-\beta_p)v_p\in B$

وكذلك لكل $\alpha\in K$ ولكل $u\in B$ فإن $\alpha u=\alpha\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha\alpha_p v_p\in B$

اي ان B هي فضاء شعاعي جزئي من V .

لكل $v\in A$ ، $v=1.v$ حيث $1\in K$ اي ان $v\in B$ ،

ومنه $A\subseteq B$. ليكن C فضاءً شعاعياً جزئياً آخر من V بحيث $A\subseteq C$ ، فإنه لكل $v\in B$ ،

$v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\cdots+\alpha_p v_p$ ، وبما ان $v_1,\ldots,v_p\in C$ ، فإنه حسب النتيجة (3.2.1) ، $v\in C$ ، اي ان $B\subset C$

وهكذا نستنتج ان B اصغر فضاء شعاعي جزئي من V تحوي A .

(و.هـ.م.)

نسمي الفضاء الشعاعي الجزئي B بالفضاء الشعاعي الجزئي المولّد بالمجموعة A ونرمز لها ب $B = [v_1, \ldots, v_n]$.

نلاحظ انه إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء الشعاعي V و $V_1, \ldots, V_n$ جميع الفضاءات الشعاعية الجزئية من V بحيث $A \subseteq V_i$ لكل $i = 1, \ldots, n$ ، فأن $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ هو فضاء شعاعي جزئي يحوي A ، وهو اصغر فضاء شعاعي جزئي يحوي A .

4.4.1 تعريف

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K . نقول ان الاشعة $v_1, \ldots, v_p$ مرتبطة خطياً إذا وجد p مقداراً سلمياً $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K$ ليست كلها معدومة بحيث $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$. وتكون الأشعة $v_1, v_2, \ldots, v_p$ مستقلة خطياً، إذا لم تكن مرتبطة خطياً ، اي انه لأي مقادير سلمية $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in K$ ، إذا كانت: $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$ فأن $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_p = 0$. اي انه إذا كان .

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = 0 \text{ فأن } \lambda_i = 0 \text{ لكل } i .$$

5.4.1 أمثلة

(1) في الفضاء الشعاعي IR^2 على الحقل IR ، الأشعة $e_1 = (1,0)$ ، $e_2 = (0,1)$ مستقلة خطياً. لأنه لأي مقادير سلمية $\lambda_1, \lambda_2 \in IR$

إذا كانت $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$ فأن: $\lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (0,0)$

، $(\lambda_1, \lambda_2) = (0,0)$ فأن $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ..

(2) في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$ ، الأشعة $v_1 = (1,3,1)$

، $v_2 = (0,1,-1)$ ، $v_3 = (2,5,3)$ مرتبطة خطياً ، لأنه إذا كان

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ حيث $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ فأن

$$\lambda_1(1,3,1) + \lambda_2(0,1,-1) + \lambda_3(2,5,3) = (0,0,0)$$

$$(\lambda_1, 3\lambda_1, \lambda_1) + (0, \lambda_2, -\lambda_2) + (2\lambda_3, 5\lambda_3, 3\lambda_3) = (0,0,0)$$

$$(\lambda_1 + 2\lambda_3 , 3\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 , \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3) = (0,0,0)$$

نستنتج أن $\lambda_1 = -2\lambda_3$ ، $\lambda_2 = \lambda_3$. لتكن $\lambda_3 = 1$

عندئذ $\lambda_1 = -2$ ، $\lambda_2 = 1$ وهذه القيم تحقق الشرط :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

(3) i ، 1 مستقلة خطياً في الفضاء الشعاعي $\mathbb{C}$

على الحقل $\mathbb{R}$ ، لأنه لأي $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ إذا كانت

$\lambda_1 . 1 + \lambda_2 . i = 0 = 0.1 + 0.i$ ، فأنه من خواص الاعداد العقدية

$\lambda_1 = 0$ ، $\lambda_2 = 0$.

1.4.6 نظرية

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، فأن

الأشعة $v_1, \dots, v_p$ ($p \geqslant 2$) مرتبطة خطياً $\Longleftrightarrow$ إذا

كان من الممكن كتابة أحدهما بشكل مزج خطي للبقية.

البرهان

لنفرض ان الأشعة $v_1,\dots,v_p$ مرتبطة خطياً ، اي أنه توجد p مقداراً سلمياً $\lambda_1,\dots,\lambda_p\in K$ ليست كلها معدومة بحيث $\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_p v_p=0$ ، لنفرض ان $\lambda_p\neq 0$ عندئذ:

$$-\lambda_p v_p=\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_{p-1}v_{p-1}$$

فأن: $v_p=\frac{-\lambda_1}{\lambda_p}v_1+\dots+\frac{-\lambda_{p-1}}{\lambda_p}v_{p-1}$

نضع $\lambda'_i=\frac{-\lambda_i}{\lambda_p}$ ، فأن:

$$v_p=\lambda'_1 v_1+\dots+\lambda'_{p-1}v_{p-1}$$

ومنه الشعاع v_p عبارة عن مزج خطي للأشعة $v_1,\dots,v_{p-1}$.

للبرهان على العكس ، لنفرض ان الشعاع v_p عبارة عن مزج خطي للأشعة $v_1,\dots,v_{p-1}$ ، فأن $v_p=\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_{p-1}v_{p-1}$ ، $\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_{p-1}v_{p-1}+(-1)v_p=0$ حيث $\lambda_p=-1\neq 0$

ومنه نستنتج ان $v_1,\dots,v_p$ مرتبطة خطياً .

(و.هـ.م.)

7.4.1 نتائج

(1) إذا كان الشعاع v مزجاً خطياً للأشعة $u_1,\dots,u_n$ ، وإذا كان u_i لأي $i=1,\dots,n$ مزجاً خطياً للأشعة $w_1,\dots,w_m$ ، فأن v هو مزج خطي للأشعة $w_1,\dots,w_m$.

(2) اي مجموعة جزئية من مجموعة اشعة مستقلة خطياً ، تكون مستقلة خطياً .

(3) إذا كانت مجموعة جزئية من مجموعة من الأشعة مرتبطة خطياً ، فأن المجموعة تكون مرتبطة خطياً .

البرهان :

(1) بما أن v مزج خطي للأشعة $u_1, \dots, u_n$ فإن

$$v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \quad , \quad \alpha_i \in K \ , \ i = 1, \dots, n$$

و u_i لكل $i = 1, \dots, n$ عبارة عن مزج خطي للأشعة $w_1, \dots, w_m$،

فإن :

$$u_1 = \alpha_{11} w_1 + \dots + \alpha_{m1} w_m \quad , \quad \alpha_{i1} \in K \ , \ i = 1, \dots, m$$

$$u_2 = \alpha_{12} w_1 + \dots + \alpha_{m2} w_m \quad , \quad \alpha_{i2} \in K \ , \ i = 1, \dots, m$$

$$\dots\dots\dots\dots \quad , \quad \dots\dots\dots\dots$$

$$u_n = \alpha_{1n} w_1 + \dots + \alpha_{mn} w_m \quad , \quad \alpha_{in} \in K \ , \ i = 1, \dots, m$$

فإن :

$$v = \alpha_1(\alpha_{11} w_1 + \dots + \alpha_{m1} w_m) + \alpha_2(\alpha_{12} w_1 + \dots + \alpha_{m2} w_m) + \dots + \alpha_n(\alpha_{1n} w_1 + \dots + \alpha_{mn} w_m)$$

$$v = (\alpha_1 \alpha_{11} w_1 + \alpha_2 \alpha_{12} w_1 + \dots + \alpha_n \alpha_{1n} w_1) + \dots + (\alpha_1 \alpha_{m1} w_m + \alpha_2 \alpha_{m2} w_m + \dots + \alpha_n \alpha_{mn} w_m)$$

$$v = (\alpha_1 \alpha_{11} + \alpha_2 \alpha_{12} + \dots + \alpha_n \alpha_{1n}) w_1 + \dots + (\alpha_1 \alpha_{m1} + \alpha_2 \alpha_{m2} + \dots + \alpha_n \alpha_{mn}) w_m$$

فإن :

$$v = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m$$

ومنه v عبارة عن مزج خطي للأشعة $w_1, \dots, w_m$.

(2) لتكن $v_1,\dots,v_n$ أشعة مستقلة خطياً ، نبرهن على ان $v_1,\dots,v_m$ مستقلة خطياً ($m < n$) . لأي مقادير سلمية $\alpha_1,\dots,\alpha_m \in K$ إذا كان $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = 0$ فأن :

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m + 0 \cdot v_{m+1} + \dots + 0 \cdot v_n = 0$$

لكن $v_1,\dots,v_n$ مستقلة خطياً ، فأن $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_m = 0$

ومنه نستنتج أن $v_1,\dots,v_m$ مستقلة خطياً .

(3) لنفرض ان المجموعة $\{v_1,\dots,v_m\}$ مجموعة جزئية من المجموعة $\{v_1,\dots,v_m,\dots,v_n\}$ ، وان $v_1,\dots,v_m$ مرتبطة خطياً ، فأنه توجد مقادير سلمية $\alpha_1,\dots,\alpha_m \in K$ ، ليست جميعها صفرية بحيث $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$ اي ان :

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + 0 \cdot v_{m+1} + \dots + 0 \cdot v_n = 0$$

وكذلك ليست كل المقادير السلمية صفرية ، وبالتالي فأن $v_1,\dots,v_m,\dots,v_n$ مرتبطة خطياً .

(و. هـ. م.)

1 . 5 الأساس والبعد

1 . 5 . 1 تعريف

لتكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، نقول أن مجموعة الاشعة $\{v_1,\dots,v_n\}$ هي اساس للفضاء الشعاعي V ، إذا تحقق مايلي :

(1) إذا كانت $v_1,\dots,v_n$ مستقلة خطياً .

(2) إذا كان أي شعاع من V مزجاً خطياً للأشعة $v_1,\dots,v_n$ اي

ان مجموعة الأشعة $\{v_1, \dots, v_n\}$ تولد الفضاء الشعاعي V .
نسمي عدد اشعة الأساس بعد الفضاء الشعاعي V. إذا كان عدد اشعة الأساس في الفضاء V هو n، عندئذ نقول ان V ذو بعد منتهي n . نرمز لبعد الفضاء الشعاعي V بالرمز $\dim V$ ونكتب $\dim V = n$، وأن $\dim\{0\}=0$.
إذا لم يوجد للفضاء الشعاعي أساس منتهي ، عندئذ نقول ان بعد الفضاء الشعاعي V غير منتهي ونكتب $\dim V = \infty$.
إذا كان الشعاع $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ حيث $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$، نسمي المقادير السلمية $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ، مركبات الشعاع v في الأساس $\{v_1, \dots, v_n\}$.

2.5.1 أمثلة

(1) في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ على الحقل $\mathbb{R}$ ، برهننا ان الشعاعين $e_1 = (1,0)$ ، $e_2 = (0,1)$ مستقلان خطياً ، وكذلك لكل $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ $(\alpha,\beta) = \alpha(1,0) + \beta(0,1)$. اي ان، اي شعاع من $\mathbb{R}^2$ عبارة عن مزج خطي للشعاعين e_1 ، e_2 ، اي ان المجموعة $\{e_1, e_2\}$ تولد الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ ، وبذلك فأن $\{e_1, e_2\}$ هي اساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ وأن $\dim \mathbb{R}^2 = 2$. ويسمى هذا الاساس ، بالأساس النظامي لـ $\mathbb{R}^2$. وعلى غرار ذلك نلاحظ ان الاساس النظامي للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^n$ على الحقل $\mathbb{R}$ هو المجموعة $\{e_1 = (1,0,\dots,0), \dots, e_n = (0,0,\dots,1)\}$ وبذلك $\dim \mathbb{R}^n = n$.

(2) اساس الفضاء الشعاعي $\mathbb{C}$ على الحقل $\mathbb{R}$ هي $\{1, i\}$ لأنه 1، i مستقلان خطياً ، وكذلك لكل $z \in \mathbb{C}$ فأن $z = a.1 + bi$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$.

3.5.1 نظرية

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، $v_1, \ldots, v_n$ أشعة من الفضاء الشعاعي V . تشكل مجموعة الأشعة $\{v_1, \ldots, v_n\}$ اساساً للفضاء الشعاعي V $\Leftrightarrow$ اذا كان أي شعاع من V يكتب بصورة وحيدة بشكل مزج خطي للأشعة $v_1, \ldots, v_n$.

البرهان :

لنفرض ان $\{v_1, \ldots, v_n\}$ تشكل أساساً للفضاء الشعاعي V ، وليكن $v \in V$ اي شعاع ، فيكون :
$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ ، حيث $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ ، واذا فرضنا $v = \lambda'_1 v_1 + \cdots + \lambda'_n v_n$ ، حيث $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n \in K$ فأن :

$$(\lambda_1 - \lambda'_1) v_1 + \cdots + (\lambda_n - \lambda'_n) v_n = 0$$

وبما ان $\{v_1, \ldots, v_n\}$ اساس للفضاء الشعاعي V، فأن $v_1, \ldots, v_n$ مستقلة خطياً ، اي ان $\lambda_1 - \lambda'_1 = 0, \ldots, \lambda_n - \lambda'_n = 0$ فأن $\lambda_1 = \lambda'_1, \ldots, \lambda_n = \lambda'_n$. اي ان اي شعاع v من الفضاء V يكتب بصورة وحيدة بشكل مزج خطي للأشعة $v_1, \ldots, v_n$.
للبرهان على العكس، لنفرض ان اي شعاع v من V يكتب

بصورة وحيدة لشكل مزج خطي للأشعة $v_1, \dots, v_n$ ، لتكن $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ بحيث $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ وكذلك نعلم ان الشعاع الصفري عبارة عن $0.v_1 + \dots + 0.v_n = 0$ ، من وحدانية التعبير فأن $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$ ، اي ان الاشعة $v_1, \dots, v_n$ مستقلة خطياً ، ومنه $\{v_1, \dots, v_n\}$ عبارة عن اساس للفضاء الشعاعي V . (و. هـ. م.)

4.5.1 تعريف

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، نقول عن مجموعة الاشعة $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ بأنها أقصى مجموعة مستقلة خطياً ، إذا تحقق مايلي :

(1) المجموعة S مستقلة خطياً .

(2) إذا كان لكل $y \in V$ ، $y \notin S$ ، المجموعة $\{v_1, \dots, v_n, y\}$ مرتبطة خطياً .

5.5.1 نظرية

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K . ولتكن $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ مجموعة جزئية من اشعة V ، فأن المجموعة S هي اساس للفضاء V $\Leftrightarrow$ إذا كانت المجموعة S أقصى مجموعة مستقلة خطياً .

البرهان :

نفرض ان المجموعة S هي اساس للفضاء V ، فأن $v_1, \ldots, v_n$ مستقلة خطياً . وكذلك لكل $y \in V$ و $y \notin S$ توجد $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ بحيث $y = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ ، أي أن : $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + (-1) y = 0$ ، لكن $-1 \neq 0$ ، فأن المجموعة $\{v_1, \ldots, v_n, y\}$ مرتبطة خطياً .

للبرهان على العكس ، نفرض ان S أقصى مجموعة مستقلة خطياً . لكل $y \in V$ إذا كان $y \in S$ فأنه يوجد i بحيث $y = v_i$ ، فأن $y = v_i = 0 \cdot v_1 + \cdots + 1 \cdot v_i + \cdots + 0 \cdot v_n$ وإذا كان $y \notin S$ فأن المجموعة $\{v_1, \ldots, v_n, y\}$ مرتبطة خطياً ، فأنه توجد $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in K$ ليست كلها معدومة بحيث $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} y = 0$. إذا كانت $\lambda_{n+1} = 0$ فأن $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ ، لكن $v_1, \ldots, v_n$ مستقلة خطياً ، فأن $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$ ، أي ان $v_1, \ldots, v_n, y$ مستقلة خطياً ، وهذا تناقض ، إذن $\lambda_{n+1} \neq 0$ فأن

$$y = \frac{-\lambda_1}{\lambda_{n+1}} v_1 + \frac{-\lambda_2}{\lambda_{n+1}} v_2 + \cdots + \frac{-\lambda_n}{\lambda_{n+1}} v_n$$ ، ومن هنا فأن :

$y = \lambda'_1 v_1 + \cdots + \lambda'_n v_n$. أي أن كل شعاع من V هو مزج خطي للأشعة $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ، ومنه S عبارة عن اساس للفضاء الشعاعي V .

(و . هـ . م .)

6.5.1 نظرية

كل فضاء شعاعي مولد بعدد منتهي من الاشعة يحتوي على اساس منتهي .

البرهان :

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، لنفرض أن الفضاء V مولداً بعدد منتهي من الأشعة $v_1, \dots, v_n$ ، إذا كانت هذه الاشعة مستقلة خطياً ، عندئذ $v_1, \dots, v_n$ تكون اساساً للفضاء الشعاعي V .

إذا لم تكن هذه الأشعة مستقلة خطياً ، اي إذا كانت مرتبطة خطياً ، لتكن $v_1, \dots, v_m$ $(m<n)$ اقصى مجموعة جزئية مستقلة خطياً من الاشعة $v_1, \dots, v_n$ ، لذلك فأن الاشعة $v_1, \dots, v_m, v_i$ $(i = m+1, \dots, n)$ مرتبطة خطياً . فتوجد مقادير سلمية $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_i \in K$ ليست كلها معدومة بحيث $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m + \lambda_i v_i = 0$ ، إذا كان $\lambda_i = 0$ فأن: $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ ، من كون الأشعة $v_1, \dots, v_m$ مستقلة خطياً ، فأن $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_m = 0$ ، اي ان $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_i$ كلها معدومة ، لذلك $v_1, \dots, v_m, v_i$ مستقلة خطياً . وهذا خلاف للفرض ، اي ان $\lambda_i \neq 0$ $(i = m+1, \dots, n)$ ، فأن

$v_i = \frac{-\lambda_1}{\lambda_i} v_1 + \dots + \frac{-\lambda_m}{\lambda_i} v_m$ لـ $(i = m+1, \dots, n)$ ، اي ان $v_i = b_1 v_1 + \dots + b_m v_m$ ، وبذلك فأن كل مزج خطي للأشعة $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n$ هو مزج خطي للأشعة $v_1, \dots, v_m$ ،

اي ان $v_1, \dots, v_m$ مجموعة تولد الفضاء V ، وهي مستقلة خطياً ، فأن $\{v_1, \dots, v_m\}$ هي عبارة عن اساس للفضاء V.
وبذلك V تحتوي على اساس منتهي .

(و. هـ. م.)

مباشرة من برهان النظرية هذه نستنتج :

(١) اذا كان الفضاء الشعاعي V على الحقل K مولداً بعدد منتهي من الاشعة $v_1, \dots, v_n$ ، وكانت الاشعة $\{v_1, \dots, v_m\}$ اساساً للفضاء الشعاعي V ، فأن $m \leq n$.

(٢) اذا كانت الأشعة $v_1, \dots, v_n$ تولد الفضاء الشعاعي V وكانت $u_1, \dots, u_m$ مستقلة خطياً فأن $m \leq n$.

(3) اذا كانت $v_1, \dots, v_n$ ، $u_1, \dots, u_m$ أساسين للفضاء الشعاعي V على الحقل K ، فأن $m = n$.

(4) اذا كان V بعده n ، فأن أي n أشعة مستقلة خطياً تكون اساساً لـ V.

7.5.1 نظرية

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، ذا بعد منته n ، ولتكن $v_1, \dots, v_p$ اشعة من V مستقلة خطيا حيث $p < n$ ، فيمكن ايجاد اشعة $v_{p+1}, \dots, v_n$ بحيث ان الاشعة $v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n$ تكون اساساً للفضاء V .
[اي ان اي مجموعة من p اشعة مستقلة خطياً ، يمكن تكملتها الى اساس في فضاء شعاعي ذي بعد n $(p<n)$].

البرهان :

لتكن $\{u_1,\dots,u_n\}$ اي اساس للفضاء الشعاعي V على الحقل K . اذا كانت كل من $u_1,\dots,u_n$ مزجاً خطياً للأشعة $v_1,\dots,v_p$ عندئذ الفضاء الشعاعي V يكون مولداً بالأشعة $v_1,\dots,v_p$ ، وكذلك $u_1,\dots,u_n$ مستقلة خطياً فأن $n \leq p$ ، لكن حسب الفرض $p<n$ وهذا تناقض، اي انه توجد بين الاشعة $u_1,\dots,u_n$ على الأقل شعاع واحد لايكون مزجاً خطياً للأشعة $v_1,\dots,v_p$ وليكن u_{i1} . لنفرض ان $\lambda,\lambda_1,\dots,\lambda_p \in K$ بحيث $\lambda u_{i1}+\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_p v_p=0$ ، اذا كان $\lambda=0$ فأن $\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_p v_p=0$ ، لكن $v_1,\dots,v_p$ مستقلة خطياً ، فأن $\lambda_1=0,\dots,\lambda_p=0$ ، اي ان من $\lambda u_{i1}+\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_p v_p=0$ نستنتج ان $\lambda=0,\ \lambda_1=0\dots,\lambda_p=0$ ، اي ان الاشعة $u_{i1},v_1,\dots,v_p$ مستقلة خطياً . اذا كان $\lambda \neq 0$ فيكون :

$$u_{i1}=\frac{-\lambda_1}{\lambda}v_1+\dots+\frac{-\lambda_p}{\lambda}v_p$$

اي ان u_{i1} مزج خطي للأشعة $v_1,\dots,v_p$ ، وهذا خلاف فرضنا. اي ان الاشعة $u_{i1},v_1,\dots,v_p$ مستقلة خطياً . وهكذا حصلنا على $p+1$ من الاشعة المستقلة خطياً . اذا كانت $p+1<n$ ، بنفس الطريقة يوجد شعاع واحد بين الاشعة $u_1,\dots,u_n$ ، مثلاً u_{i2} بحيث لا يكون مزجاً خطياً للأشعة $u_{i1},v_1,\dots,v_p$ ، ونضيف هذا الشعاع ونحصل على $p+2$ شعاع وهكذا الى ان نحصل على n من الاشعة المستقلة خطياً، وبما ان بعد الفضاء V هو n ، فأن المجموعة التي نحصل عليها تحوي n اشعة مستقلة هي اساس . اي أننا

كملنا الأشعة $v_p, \dots, v_1$ الى اساس .

(و. هـ. م.)

<u>8.5.1 نظرية</u>

ليكن V فضاءً شعاعياً ذا بعد منتهي n على الحقل K ، وليكن F فضاءً شعاعياً جزئياً من الفضاء V فأن :

(1) $\dim F \leq \dim V$

(2) اذا كان $\dim V = \dim F$ فأن $F = V$.

<u>البرهان :</u>

(1) F فضاء شعاعي ببعد منته لأنه فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V . لتكن $\{v_1, \dots, v_p\}$ اساساً للفضاء F ، فأن هذه الأشعة مستقلة خطياً ، حسب النظرية (7.5.1) يمكن تكملتها الى اساس ، اي يمكن ايجاد اشعة $v_{p+1}, \dots, v_n$ بحيث $v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n$ تكوّن اساساً للفضاء V ، فينتج ان $p \leq n$ ، اي ان $\dim F \leq \dim V$.

(2) اذا كان $n = p$ ، فأن هذا يعني أن الفضاءين الشعاعيين V ، F مولدان بنفس الاشعة ، فأن $F = V$.

(و. هـ. م.)

9.5.1 نظرية

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي V على الحقل K ، فأن :

$$\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2$$

البرهان :

لتكن $\{v_1,\dots,v_p\}$ أساساً للفضاء الشعاعي $V_1\cap V_2$ ، اي ان $\dim(V_1\cap V_2)=p$ ، نعلم ان $V_1\cap V_2\subset V_1$ ، $V_1\cap V_2\subset V_2$ حسب النظرية (7.5.1) يمكن تكملة $\{v_1,\dots,v_p\}$ الى اساس للفضاء V_1 ، والى اساس للفضاء V_2 ، اي انه توجد الاشعة $v'_{p+1},\dots,v'_r$ من الفضاء V_1 بحيث $\{v_1,\dots,v_p,v'_{p+1},\dots,v'_r\}$ تكون اساساً للفضاء V_1 ، وكذلك توجد الأشعة $v''_{p+1},\dots,v''_s$ من الفضاء V_2 بحيث $\{v_1,\dots,v_p,v''_{p+1},\dots,v''_s\}$ تكون اساساً للفضاء V_2 ، فأن : $\dim V_1=r$ و $\dim V_2=s$. لكل $h\in V_1+V_2$ ، فأن $h=y+z$ حيث $y\in V_1$ ، $z\in V_2$ ، فأنه توجد مقادير سلمية $\alpha_1,\dots,\alpha_p,\dots,\alpha_r$ ، $\beta_1,\dots,\beta_p,\dots,\beta_s$ في K بحيث :

$$y=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_pv_p+\alpha_{p+1}v'_{p+1}+\dots+\alpha_rv'_r$$
$$z=\beta_1v_1+\dots+\beta_pv_p+\beta_{p+1}v''_{p+1}+\dots+\beta_sv''_s$$

فأن :

$$h=(\alpha_1+\beta_1)v_1+\dots+(\alpha_p+\beta_p)v_p+\alpha_{p+1}v'_{p+1}+\dots+\alpha_rv'_r+\beta_{p+1}v''_{p+1}+\dots+\beta_sv''_s$$

اي ان كل شعاع من V_1+V_2 ، هو مزج خطي للأشعة التالية :

$v_1, \dots, v_p, v'_{p+1}, \dots, v'_r, v''_{p+1}, \dots, v''_s$

الخطية مقادير سلمية $c_1, \dots, c_p, c_{p+1}, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_{r+s-p} \in K$

فإذا كان :

$$c_1 v_1 + \dots + c_p v_p + c_{p+1} v'_{p+1} + \dots + c_r v'_r + c_{r+1} v''_{p+1} + \dots + c_{r+s-p} v''_s = 0$$

فإن :

$$x = c_{r+1} v''_{p+1} + \dots + c_{r+s-p} v''_s = -(c_1 v_1 + \dots + c_p v_p + c_{p+1} v'_{p+1} + \dots + c_r v'_r)$$

لكن $\{v_1, \dots, v_p, v'_{p+1}, \dots, v'_r\}$ هي أساس للفضاء الشعاعي V_1 ، وكذلك $v''_{p+1}, \dots, v''_s$ هي أشعة من الفضاء V_2 فإن $x \in V_1$ ، $x \in V_2$ ومنه $x \in V_1 \cap V_2$. لكن الأشعة $v_1, \dots, v_p$ هي أساس للفضاء $V_1 \cap V_2$ فإن :

$x = d_1 v_1 + \dots + d_p v_p$ حيث $d_1, \dots, d_p \in K$ ، من هنا فإن

$$d_1 v_1 + \dots + d_p v_p = c_{r+1} v''_{p+1} + \dots + c_{r+s-p} v''_s$$

أي أن :

$$d_1 v_1 + \dots + d_p v_p - c_{r+1} v''_{p+1} - \dots - c_{r+s-p} v''_s = 0$$

لكن بما أن الأشعة $v_1, \dots, v_p, v''_{p+1}, \dots, v''_s$ مستقلة خطياً، فإن $d_1 = \dots = d_p = c_{r+1} = \dots = c_{r+s-p} = 0$ ، من هنا نستنتج أن $c_1 = \dots = c_r = 0$ ، أي أن الأشعة $v_1, \dots, v_p, v'_{p+1}, \dots, v'_r, v''_{p+1}, \dots, v''_s$ مستقلة خطياً ، أي أنها عبارة عن أساس للفضاء $V_1 + V_2$ ، ومنه $\dim(V_1 + V_2) = r + s - p$ فإن :

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

ومنه

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

(و.هـ.م.)

نظرية 10.5.1

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي V على الحقل K ، بحيث $V = V_1 \oplus V_2$ فأن:
$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$.

البرهان :

إذا كان $V = V_1 \oplus V_2$ ، فأن $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ ،وكذلك $V = V_1 + V_2$.
اي ان $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$ و $\dim V = \dim(V_1 + V_2)$ ، لكن حسب النظرية (9.5.1)

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

فأن :
$$\dim V = \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

(و . هـ . م .)

نظرية 11.5.1

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين ، ببعدين n ، m على التوالي على الحقل K فأن :

$$\dim(V_1 \times V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

البرهان :

لتكن $\{v_1, \ldots, v_n\}$ أساساً للفضاء V_1 ، $\{u_1, \ldots, u_m\}$ للفضاء V_2 ، نبرهن $\{(v_1, 0), \ldots, (v_n, 0), (0, u_1), \ldots, (0, u_m)\}$ هي اساس لـ $V_1 \times V_2$.

$$\forall v \in V_1 \times V_2 \,, \quad v = (\alpha, \beta) = (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \,,\ \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_m u_m)$$

$$= \alpha_1(v_1,0) + \cdots + \alpha_n(v_n,0) + \beta_1(0,u_1) + \cdots + \beta_m(0,u_m)$$

كذلك لاية مقادير سلمية $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_m \in K$, اذا كان:

$$\alpha_1(v_1,0) + \cdots + \alpha_n(v_n,0) + \beta_1(0,u_1) + \cdots + \beta_m(0,u_m) = (0,0)$$

فأن :

$$(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \ , \ \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_m u_m) = (0,0)$$

اي ان : $\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_m u_m = 0$ و $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$

فأن $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ ، لأن الاشعة $v_1,\ldots,v_m$ مستقلة خطياً،

و $\beta_1 = \cdots = \beta_m = 0$ لأن الاشعة $u_1,\ldots,u_m$ مستقلة خطياً.

اي ان $\{(v_1,0),\ldots,(v_n,0),(0,u_1),\ldots,(0,u_m)\}$ هي اساس

للفضاء الشعاعي $V_1 \times V_2$ ، ومنه $\dim(V_1 \times V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

(و. هـ. م.)

تمـــارين

(1) بين أياً من المجموعات التاليـــة V ، عبارة عن فضاء شعاعي على الحقل المذكور K بالنسبة للعمليتين المعرفتين :-

(a) لتكن $K = V = \mathbb{R}$ ولتكن عمليـــة الجمع معرفـــة كالآتي:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad , \quad x \oplus y = 2x + 2y$$

والضرب بمقدار ســـلمي يكون معرفاً كالآتي :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \, , \forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad \lambda \odot x = \lambda x$$

(b) لتكن $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ حيث $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ عبارة عن مجموعة جميع التطبيقات من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$ وليكن $K = \mathbb{R}$.

لتكن عملية الجمع معرفـــة كالآتي :

$$\forall f, g \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \, , \forall x \in \mathbb{R} \, , \, (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

والضرب بمقدار ســـلمي يكون معرفاً كالآتي :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \, , \forall f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \, , \forall x \in \mathbb{R} \, , \, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

(c) لتكن $V = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ و $K = \mathbb{R}$. ولتكن عملية الجمع معرفـــة كالآتي :

$$\forall (a,b), (c,d) \in V \, , \, (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

والضرب بمقدار ســـلمي يكون معرفاً كالآتي :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \, , \forall (a,b) \in V \quad , \quad \lambda(a,b) = (\lambda a, b)$$

(2) اي من المجموعات الجزئيـــة A هي فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي V على الحقل K .

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$, $A = \{(a,b,c) : a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}$

(b) $A=\{(0,y,z) : y,z\in \mathbb{R}\}$ ، $K=\mathbb{R}$ ، $V=\mathbb{R}^3$

(c) $A=\{f\in F(\mathbb{R},\mathbb{R})$: f عبارة عن تطبيق مستمر$\}$ ، $K=\mathbb{R}$ ،
$V=F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(d) $A=\{f\in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \forall x\in\mathbb{R} , -f(x)=f(-x)\}$ ، $K=\mathbb{R}$ ،
$V=F(\mathbb{R},\mathbb{R})$

(3) ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، ولتكن
(a) $V_1=\{(x,0) : x\in V\}$ ، $V_2=\{(0,y) : y\in V\}$ فضاءين
شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي V^2 على الحقل
K ، برهن ان $V^2=V_1\oplus V_2$.

(b) اذا كان $V_1=\{(0,y,z) : y,z\in\mathbb{R}\}$ ، $V_2=\{(x,y,0) : x,y\in\mathbb{R}\}$
فضاءان شعاعيان جزئيان من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على
الحقل $\mathbb{R}$. فهل ان $\mathbb{R}^3=V_1\oplus V_2$ ؟ وضح ذلك .

(4) اكتب الشعاع $v=(1,-2,5)$ بشكل مزج خطي للأشعة
$v_1=(1,1,1)$ ، $v_2=(1,2,3)$ ، $v_3=(2,-1,1)$.

(5) في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$ ، اثبت ان الأشعة
$v_1=(1,2,-1)$ ، $v_2=(1,3,0)$ ، $v_3=(1,3,-1)$ مستقلة خطياً،
ثم أثبت ان الشعاع $v=(7,14,-1)$ عبارة عن مزج خطي
للأشعة v_1 ، v_2 ، v_3 .

(6) في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$ ، اثبت ان الأشعة $v_1=(1,2,3)$ ، $v_2=(3,2,1)$ ، $v_3=(4,4,5)$ مستقلة خطياً .

(7) ما هي القيمة التي يجب أعطاؤها للعنصر a ، لكي تكون الاشعة $v_1=(1,2,3,1)$ ، $v_2=(0,3,-1,2)$ ، $v_3=(1,0,3,-4)$ ، $v_4=(2,5,a,-1)$ في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^4$ على الحقل $\mathbb{R}$ مرتبطة خطياً .

(8) لتكن $v_1,\dots,v_n$ اشعة مستقلة خطياً في الفضاء الشعاعي V على الحقل K . برهن ان الأشعة $u_1,\dots,u_n$ المعرفة بالشكل التالي : $u_1=v_1$ ، $u_2=v_1+v_2$ ، ... ، $u_n=v_1+\dots+v_n$ مستقلة خطياً .

(9) في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^n$ على الحقل $\mathbb{R}$ أثبت أن الأشعة :

$$X_1=(x_{11},x_{12},\dots,x_{1n})$$
$$X_2=(0,x_{22},\dots,x_{2n})$$
$$\vdots$$
$$X_i=(0,0,\dots,x_{ii},\dots,x_{in})$$
$$\vdots$$
$$X_n=(0,0,\dots\dots,0,x_{nn})$$

حيث $x_{ii}\neq 0$ لكل $i=1,\dots,n$ ، مستقلة خطياً .

(10) اكتب كثيرة الحدود $v = 3t^2 + 8t - 5$ كمزيج خطي لكثيرات الحدود : $v_1 = 2t^2 + 3t - 4$ ، $v_2 = t^2 - 2t - 3$.

(11) في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$ ، في اي حالة تكون مجموعة الأشعة $\{v_1, v_2, v_3\}$ اساساً لذلك الفضاء .

(a) $v_1 = (1,0,0)$ ، $v_2 = (1,1,0)$ ، $v_3 = (3,-1,1)$

(b) $v_1 = (3,1,2)$ ، $v_2 = (2,1,2)$ ، $v_3 = (-1,2,5)$

(c) $v_1 = (1,1,0)$ ، $v_2 = (0,1,1)$ ، $v_3 = (1,2,1)$

(12) اوجد اساساً للفضاء الشعاعي الجزئي

$$V_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$$

في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$.

(13) اوجد بعد الفضاء الشعاعي V على الحقل $\mathbb{R}$ في كل مما يلي :

(a) $V = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1 = -2x_2 \ , \ x_3 = x_2 \ , \ x_i \in \mathbb{R} \}$

(b) $V = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_3 + x_4 = 0 \}$

(c) $V = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \ , \ 2x_3 - x_4 = 0 \}$

(14) ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K بعده 6 ، وليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين جزئيين بعد كل منهما 4 ، $V_1 \neq V_2$. اوجد الأبعاد الممكنة للفضاء $V_1 \cap V_2$.

(15) لتكن $\{u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s\}$ مجموعة مستقلة خطياً في الفضاء الشعاعي V على الحقل K ، وليكن V_1 الفضاء الشعاعي المولد بالأشعة $\{u_1, \ldots, u_r\}$ ، V_2 الفضاء الشعاعي المولد بالأشعة $\{w_1, \ldots, w_s\}$ برهن أن $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

(16) ليكن $\mathbb{R}^4$ فضاءً شعاعياً على الحقل $\mathbb{R}$ ، ولتكن

$A = \{(1,1,0,0) , (0,1,1,0) , (0,0,1,1)\}$

$B = \{(1,0,1,0) , (0,2,1,1)\}$

وإذا كان $V_1 = [A]$ ، $V_2 = [B]$.

(a) ما هو الشكل الذي يكتب بها عناصر V_1 وعناصر V_2 .

(b) اوجد $\dim V_1$ ، $\dim V_2$.

(c) أوجد اساس لـ $V_1 \cap V_2$.

(d) هل $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$ ؟

(17) في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^4$ على الحقل $\mathbb{R}$ اوجد أساس الفضاء الشعاعي المولد بالأشعة .

$\{v_1 = (1,0,2,3) , v_2 = (7,4,-2,-1) , v_3 = (5,2,4,7) , v_4 = (3,2,0,1)\}$

(18) ليكن V_1 فضاءً شعاعياً جزئياً من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^4$ على الحقل $\mathbb{R}$ مولداً بالأشعة: $v_1 = (2,2,1,0)$ ، $v_2 = (1,4,2,-1)$ ، $v_3 = (2,1,-1,0)$ ، $v_4 = (2,-5,-4,2)$ ، وليكن V_2 فضاءً شعاعياً جزئياً آخراً من الفضاء $\mathbb{R}^4$ مولداً بالأشعة : $u_1 = (2,1,4,5)$

$u_2 = (1, 2, 3, 4)$.

(a) أوجد أساس لـ V_1 ، V_2 .

(b) أوجد $\dim(V_1 \cap V_2)$.

(c) أوجد $\dim(V_1 + V_2)$.

(d) اكمل اساس V_1 الى اساس لـ $\mathbb{R}^4$.

(19) ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، وليكن $V_1, \ldots, V_m$ فضاءات شعاعية جزئية من V ، بحيث $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$. إذا كانت $\{u_{11}, \ldots, u_{n_1 1}\}$ اساساً في V_1 ، $\{u_{12}, \ldots, u_{n_2 2}\}$ اساساً في V_2 ، - - - - ، $\{u_{1m}, \ldots, u_{n_m m}\}$ اساساً في V_m . برهن ان المجموعة $\{u_{11}, \ldots, u_{n_1 1}, u_{12}, \ldots, u_{n_2 2}, \ldots, u_{1m}, \ldots, u_{n_m m}\}$ هي اساس في الفضاء V .

الفصل الثاني
التطبيقات الخطية

1.2 مبادئ أولية

1.1.2 تعريف

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K ، وليكن f تطبيقاً من V_1 في V_2 . فنقول ان f هو تطبيق خطي من V_1 في V_2 إذا تحقق الشرطين التاليين :

$$\forall v_1, v_2 \in V_1 , \quad f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2) \qquad (1)$$

$$\forall v \in V_1 , \quad \forall \lambda \in K , \quad f(\lambda v) = \lambda f(v) \qquad (2)$$

ويمكن كتابة الشرطين في شرط واحد كالآتي :

$$\forall v_1, v_2 \in V_1 , \ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K , \ f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$$

2.1.2 أمثلة

(1) ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K ، f تطبيقاً من الفضاء V_1 في الفضاء V_2 ، معرفاً كالآتي $\forall x \in V_1 , f(x) = 0$. فأن f عبارة عن تطبيق خطي ، حيث

$$\forall x,y \in V_1 , \quad f(x+y) = 0 = 0+0 = f(x) + f(y)$$

$$\forall \lambda \in K , \ \forall x \in V_1 , \quad f(\lambda x) = 0 = \lambda . 0 = \lambda f(x) ,$$

ونسمي التطبيق الخطي من هذا النوع ، بالتطبيق الصفري ونرمز له بالرمز f_0.

(2) ليكن $\mathbb{R}^2$ ، $\mathbb{R}^3$ فضاءين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{R}$،
و $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ تطبيقاً معرفاً كالآتي :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \quad f(x,y,z) = (x-y \ , \ y-z)$$

فإن f عبارة عن تطبيق خطي لأنه:

$$\forall (x,y,z),(x_1,y_1,z_1) \in \mathbb{R}^3 \ , \ f((x,y,z)+(x_1,y_1,z_1)) =$$
$$= f(x+x_1 \ , \ y+y_1 \ , \ z+z_1) = (x+x_1-(y+y_1) \ , \ y+y_1-(z+z_1))$$
$$= (x-y+x_1-y_1 \ , \ y-z+y_1-z_1) = (x-y \ , \ y-z) + (x_1-y_1 , y_1-z_1)$$
$$= f(x,y,z) + f(x_1,y_1,z_1)$$

وأنه $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ , \ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ f(\lambda(x,y,z)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) =$

$$= (\lambda x - \lambda y \ , \ \lambda y - \lambda z) = (\lambda(x-y) \ , \ \lambda(y-z)) = \lambda(x-y \ , \ y-z)$$
$$= \lambda f(x,y,z) \ .$$

نسمي التطبيق الخطي $f : V_1 \to V_2$ ايزومورفيزماً إذا كان تقابلاً .

إذا كان O_1 هو العنصر الحيادي في الفضاء الشعاعي V_1 ، O_2 هو العنصر الحيادي في الفضاء الشعاعي V_2 ، و f تطبيقاً خطياً للفضاء الشعاعي V_1 في الفضاء V_2 فإن :

$$\forall v \in V_1 \ , \ v + O_1 = O_1 + v = v$$
$$f(v) = f(v+O_1) = f(O_1+v)$$

لكن f خطي فإن : $f(v) = f(v) + f(O_1)$

بما أن $f(v) \in V_2$ فإن : $f(v) = f(v) + O_2$

فإن : $f(v) + f(O_1) = f(v) + O_2$

بما ان كل عنصر منتظم بالنسبة للجمع في الفضاء الشعاعي فأن:

$$f(0_1) = 0_2$$

وكذلك :

$$\forall v \in V_1 , \quad f(-v) = f(-v) + (f(v) + (-f(v)))$$
$$= (f(-v) + f(v)) + (-f(v))$$
$$= f((-v) + v) + (-f(v))$$
$$= f(0_1) + (-f(v)) = 0_2 + (-f(v)) = -f(v)$$

فأن : $\forall v \in V_1 , \quad f(-v) = -f(v)$

3.1.2 نظرية

تركيب التطبيقات الخطية يكون تطبيقاً خطياً .

البرهان :

ليكن V_1 ، V_2 ، V_3 ثلاثة فضاءات شعاعية على نفس الحقل K . وليكن $f: V_1 \to V_2$ ، $g: V_2 \to V_3$ تطبيقين خطيين ، نبرهن ان $h = g \circ f : V_1 \to V_3$ عبارة عن تطبيق خطي من V_1 في V_3 .

$$\forall v_1, v_2 \in V_1 , \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K , \quad h(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = (g \circ f)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$$
$$= g[f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)]$$

بما ان f تطبيق خطي فأن :

$$g[f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)] = g[\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)]$$

وبما ان g تطبيق خطي فأن :

$$g[\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)] = \lambda_1 g(f(v_1)) + \lambda_2 g(f(v_2))$$

$$= \lambda_1 (g \circ f)(v_1) + \lambda_2 (g \circ f)(v_2) = \lambda_1 h(v_1) + \lambda_2 h(v_2)$$

(و.هـ.م.)

2.2 صورة ونواة التطبيق الخطي

1.2.2 تعريف

ليكن V_1، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K، وليكن f تطبيقاً خطياً للفضاء الشعاعي V_1 في الفضاء الشعاعي V_2. نسمي مجموعة العناصر $x \in V_1$ والتي تحقق $f(x) = 0_2$، لنواة التطبيق الخطي f، ونرمز لها بالرمز $Ker f$ اي ان:

$$Ker f = \{x \in V_1 : f(x) = 0_2\} = f^{-1}(0_2)$$

ونسمي مجموعة العناصر $y \in V_2$ والتي هي صور لعناصر من V_1 لصورة f ونرمز لها بالرمز $Im f$، اي ان:

$$Im f = \{y \in V_2 : \exists x \in V_1 , f(x) = y\} .$$

2.2.2 نظرية

ليكن V_1، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K، وليكن f تطبيقاً خطياً للفضاء V_1 في الفضاء V_2 فأن:

(1) $Ker f$ عبارة عن فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي V_1.

(2) $Im f$ عبارة عن فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V_2.

(3) f يكون متبايناً $\Leftrightarrow$ $Ker f = \{0_1\}$.

البرهان :

(1) $\forall x,y \in Ker f \quad , \quad f(x) = 0_2 \quad , \quad f(y) = 0_2$

لذلك فان:

$$f(x) - f(y) = 0_2 \Longrightarrow f(x-y) = 0_2 \Longrightarrow x - y \in Ker f$$

وكذلك

$$\forall \lambda \in K \quad , \forall x \in Ker f \quad , \quad f(x) = 0_2$$

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda . 0_2 = 0_2 \Rightarrow \lambda x \in Ker f$$

ومنه نستنتج ان $Ker f$ فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي V_1 على الحقل K .

(2) $\forall y_1, y_2 \in Im f \quad , \exists x_1, x_2 \in V_1 \quad , \quad f(x_1) = y_1 \; , \; f(x_2) = y_2$

$$y_1 - y_2 = f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2)$$

لكن $x_1 - x_2 \in V_1$ ، فان : $y_1 - y_2 \in Im f$

وكذلك :

$$\forall \lambda \in K \; , \; \forall y \in Im f \; , \exists x \in V_1 \quad , \quad f(x) = y$$

$$\lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x)$$

لكن $\lambda x \in V_1$ ، فان : $\lambda y \in Im f$ ، ومنه $Im f$ فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي V_2 على الحقل K .

(3) نفرض f متباين ، فانه لكل $x \in Ker f$ ، $f(x) = 0_2$.

لكن $f(0_1) = 0_2$ ، فان $f(x) = f(0_1)$ ، بما ان f متباين فان $x = 0_1$. اي ان $Ker f = \{0_1\}$.

نفرض الآن $Ker f = \{0_1\}$ ، ولنفرض انه لكل $x, y \in V_1$ ، $f(x) = f(y)$.

فان : $f(x) - f(y) = 0_2 \Rightarrow f(x-y) = 0_2 \Rightarrow x - y \in Ker f$

لكن $Ker f = \{0_1\}$ ، فمنه $x - y = 0_1$. اي ان $x = y$ ، وبذلك f متباين .

(و . هـ . م .)

3.2.2 نظرية

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K ، وليكن $f : V_1 \to V_2$ ايزومورفيزماً ، فأن $f^{-1} : V_2 \to V_1$ عبارة عن ايزومورفيزم .

البرهان :

لكل $v_1, v_2 \in V_2$ يوجد $u_1, u_2 \in V_1$ بحيث $f(u_1) = v_1$ ، $f(u_2) = v_2$ فأن $f^{-1}(v_1) = u_1$ ، $f^{-1}(v_2) = u_2$ من هنا فأن :

$$f^{-1}(v_1 + v_2) = f^{-1}(f(u_1) + f(u_2)) = f^{-1}(f(u_1 + u_2)) = (f^{-1} \circ f)(u_1 + u_2)$$
$$= u_1 + u_2 = f^{-1}(v_1) + f^{-1}(v_2)$$

وكذلك : $\forall \lambda \in K , \forall v \in V_2 \quad , \quad f^{-1}(\lambda v) = f^{-1}(\lambda f(u)) =$

$$= f^{-1}(f(\lambda u)) = (f^{-1} \circ f)(\lambda u) = \lambda u = \lambda f^{-1}(v)$$

فأن f^{-1} تطبيق خطي للفضاء V_2 في الفضاء V_1.

لكل $v_1, v_2 \in V_2$ يوجد $u_1, u_2 \in V_1$ بحيث $f(u_1) = v_1$ ، $f(u_2) = v_2$ فأنه واذا كان $f^{-1}(v_1) = f^{-1}(v_2)$ فأن $u_1 = u_2$ ، ومنه نستنتج $f(u_1) = f(u_2)$ فأن $v_1 = v_2$ ومنه f^{-1} متباين .

ونلاحظ انه لكل $u \in V_1$ يوجد $v \in V_2$ بحيث $f(u) = v$ ، ومنه $f^{-1}(v) = u$ فأن f^{-1} غامر . نستنتج ان f^{-1} ايزومورفيزم .

(و . هـ . م .)

4.2.2 نظرية

الصورة العكسية لفضاء شعاعي جزئي عبارة عن فضاء شعاعي جزئي .

البرهان :

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K ، $f : V_1 \to V_2$ تطبيقاً خطياً . وليكن F فضاءً شعاعياً جزئياً من الفضاء V_2 ، لنبرهن أن $f^{-1}(F)$ هو فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي V_1 .

$$\forall v_1, v_2 \in f^{-1}(F) \quad \exists\, u_1, u_2 \in F \;,\; f(v_1) = u_1 \;,\; f(v_2) = u_2 \;,$$

$$f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = u_1 - u_2 \in F \Longrightarrow v_1 - v_2 \in f^{-1}(F)$$

وكذلك

$$\forall \lambda \in K \;,\; \forall v_1 \in f^{-1}(F) \quad \exists\, u_1 \in F \;,\; f(v_1) = u_1 \;,\; f(\lambda v_1) =$$

$$= \lambda f(v_1) = \lambda u_1 \in F \Longrightarrow \lambda v_1 \in f^{-1}(F) \;.$$

(و . هـ . م .)

3.2 الأساس والتطبيق الخطي

1.3.2 نظرية

ليكن V_1 فضاءً شعاعياً على الحقل K ، ذا بعد منتهي n ، ولتكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ أساساً للفضاء الشعاعي V_1 . وليكن V_2 فضاءً شعاعياً على الحقل K ، $u_1, \dots, u_n$ أشعة ما من الفضاء V_2 ، فإنه يوجد تطبيق خطي وحيد $f : V_1 \to V_2$ ، بحيث

يكون $f(v_i) = u_i$ لكل $i = 1, \dots, n$.

البرهان :

كل شعاع من V_1 يمكن كتابته بشكل مزج خطي لأشعة الاساس ، اي انه لكل $v \in V_1$ توجد مقادير سلمية $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ بحيث $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$.

نعرف $f : V_1 \to V_2$ كمايلي :

$$\forall v \in V_1 \ , \ f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n)$$
$$= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$$

$$\forall u, v \in V_1 \quad \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \ , \ \exists \beta_1, \dots, \beta_n \in K$$

بحيث $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \quad , \quad v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_n$

فان $f(u+v) = f[(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) + (\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n)]$

$$= f[(\alpha_1 + \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) v_n]$$
$$= (\alpha_1 + \beta_1) u_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) u_n$$
$$= (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) + (\beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n)$$
$$= f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) + f(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n)$$
$$= f(u) + f(v)$$

$$\forall \lambda \in K \ ; \ \forall v \in V_1 \ , \ f(\lambda v) = f(\lambda(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n))$$
$$= f(\lambda \alpha_1 v_1 + \dots + \lambda \alpha_n v_n) = \lambda \alpha_1 u_1 + \dots + \lambda \alpha_n u_n$$
$$= \lambda(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = \lambda f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \lambda f(v)$$

لذلك نستنتج ان f تطبيق خطي . واضح من تعريف f ان $f(v_i) = u_i$ لكل $i = 1, \dots, n$.

إذا كان g اي تطبيق خطي آخر من V_1 في V_2 ، بحيث $g(v_i)=u_i$ لكل $i=1,\dots,n$ فأنه :

$$\forall v\in V_1 \ , \ g(v)=g(\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n)=\alpha_1 g(v_1)+\dots+\alpha_n g(v_n)$$
$$=\alpha_1 u_1+\dots+\alpha_n u_n=\alpha_1 f(v_1)+\dots+\alpha_n f(v_n)$$
$$=f(\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n)=f(v)$$

ومنه $f=g$ و f وحيد .

(و . هـ . م .)

2.3.2 نتيجة

ليكن V_1 فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، بعده n ولتكن $\{v_1,\dots,v_n\}$ اساساً في V_1 . وليكن V_2 فضاءاً شعاعياً على نفس الحقل K ، $u_1,\dots,u_n$ اشعة ما من الفضاء V_2 ، وليكن $f:V_1\to V_2$ تطبيقاً خطياً بحيث $f(v_i)=u_i$ لكل $i=1,\dots,n$ فأن :

(1) f يكون متبايناً $\Leftrightarrow$ إذا كانت $u_1,\dots,u_n$ مستقلة خطياً .

(2) f يكون غامراً $\Leftrightarrow$ إذا كانت $u_1,\dots,u_n$ تولد V_2.

البرهان :

(1) لكل $x\in V_1$ ، توجد مقادير سلمية $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in K$ بحيث $x=\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n$. لنفرض ان الأشعة $u_1,\dots,u_n$ مستقلة خطياً . ليكن $x\in \ker f$ فأن $f(x)=0$ اي ان

$$f(x)=f(\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n)=\lambda_1 u_1+\dots+\lambda_n u_n=0$$

بما أن $u_1,\dots,u_n$ مستقلة خطياً، فأن $\lambda_1=\dots=\lambda_n=0$

أي أن : $x=0.v_1+\dots+0.v_n=0$ ، ومنه $Ker f=\{0\}$

حسب النظرية (2.2.2) f يكون متباينا .

لنفرض ان f متباين ، ولتكن $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in K$ بحيث $\lambda_1u_1+\dots+\lambda_nu_n=0$

فأن : $\lambda_1u_1+\dots+\lambda_nu_n=f(\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n)=0$

ومنه $\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n\in Ker f$ ، لكن $Ker f=\{0\}$ ، فأن

$\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n=0$ ، بما ان $\{v_1,\dots,v_n\}$ عبارة عن اساس

في الفضاء V_1 ، فأن $\lambda_1=\dots=\lambda_n=0$ ، ومنه نستنتج

ان الأشعة $u_1,\dots,u_n$ مستقلة خطياً .

(ع) لنفرض $V_2=[u_1,\dots,u_n]$ ، فأنه لكل $u\in V_2$ توجد

$\lambda_1,\dots,\lambda_n\in K$ بحيث $u=\lambda_1u_1+\dots+\lambda_nu_n$ ، ولكن

$$f(\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n)=\lambda_1u_1+\dots+\lambda_nu_n=u$$

اي ان كل $u\in V_2$ هو صورة لعنصر $v=\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n$

من V_1 ، ومنه نستنتج ان f غامر .

ليكن f غامر ، لكل $u\in V_2$ يوجد $v\in V_1$ بحيث $f(v)=u$ ،

فأنه توجد $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in K$ بحيث $v=\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n$ ، فأن :

$$f(v)=f(\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n)=\lambda_1u_1+\dots+\lambda_nu_n=u$$

اي ان كل شعاع $u\in V_2$ هو مزج خطي للأشعة $u_1,\dots,u_n$ ،

ومنه نستنتج ان $V_2=[u_1,\dots,u_n]$.

(و . هـ . م .)

نستنتج مباشرة من النتيجة السابقة ان :

التطبيق f يكون ايزومورفيزماً $\Leftrightarrow$ صورة اساس في الفضاء V_1 وفق التطبيق الخطي f هو اساس في الفضاء V_2 .

نظرية 3.3.2

كل فضاء شعاعي ببعد منتهي n على الحقل K ، يكون ايزومورفيزمياً مع الفضاء K^n .

البرهان :

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K بعده n . ولكن $\{v_1,\dots,v_n\}$ اساساً في V . لنأخذ في K^n الاساس النظامي $\{e_1,\dots,e_n\}$ ، ولنعرف $f:V\to K^n$ كمايلي: $f(v_i)=e_i$ من اجل كل $i=1,\dots,n$ ، برهنا في النظرية (1.3.2) ان f تطبيق خطي ، وكذلك بما ان $\{e_1,\dots,e_n\}$ اساس ، فانه حسب النتيجة (2.3.2) f يكون ايزومورفيزماً .

(و. هـ . م.)

نظرية 4.3.2

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K ، فان V_1 ، V_2 ايزومورفيزميان $\Leftrightarrow$ اذا كان لهما نفس البعد .

البرهان :

ليكن V_1 ، V_2 ايزومورفيزميان ، أي أن صورة اساس

من V_1 هي اساس في V_2، ومنه عدد أشعة الاساس متساوية فلهما نفس البعد .

ليكن للفضاءين V_1 ، V_2 نفس البعد n ، فان V_1 يكون ايزومورفيزميا مع K^n، وكذلك V_2 يكون ايزومورفيزميا مع K^n.
بما ان تركيب ايزومورفيزمين هو ايزومورفيزم ، فان الفضاء V_1 ايزومورفيزمية مع الفضاء V_2 .

(و.هـ.م.)

5.3.2 نظرية

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين لبعدين منتهيين على نفس الحقل K ، وليكن $f: V_1 \to V_2$ تطبيقا خطيا عندئذ

$$\dim V_1 = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f)$$

البرهان :

اذا كانت $\ker f = \{0_{V_1}\}$ عندئذ f يكون متباينا، $\dim(\ker f)=0$،
والتطبيق f من V_1 على $\operatorname{Im} f$ يكون تقابلا ، فان :

$$\dim V_1 = \dim(\operatorname{Im} f)$$

اي ان :

$$\dim V_1 = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f)$$

اذا كانت $\ker f \neq \{0_{V_1}\}$ ، نفرض ان $\{v_1,\dots,v_n\}$ هي أساس في $\ker f$ ، $\{u_1,\dots,u_m\}$ اساسا في $\operatorname{Im} f$ ، كما نفرض ان $v_{n+1},\dots,v_{n+m}$ هي اشعة من V_1، بحيث $f(v_{n+i}) =$ [redacted] لكل $i=1,\dots,m$. نبرهن ان [redacted] $v_n, v_{n+1},\dots,v_{n+m}\}$ هي اساس في V_1. لتكن $\lambda_1,\dots,\lambda_n,\dots,\lambda_{n+m} \in K$ ، [redacted]
فان : $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \dots + \lambda_{n+m} v_{n+m} = 0_{V_1}$

$f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \dots + \lambda_{n+m} v_{n+m}) = f(0_{v_1}) = 0_{v_2}$

لكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ هو أساس في $Ker f$ فإن :

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in Ker f$

إذن $f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = 0_{v_2}$ ، وكذلك فإن $f(v_{n+i}) = u_i$

لكل $i = 1, \dots, m$ ، أي أن $\lambda_{n+1} u_1 + \dots + \lambda_{n+m} u_m = 0_{v_2}$

لكن الأشعة $u_1, \dots, u_m$ مستقلة خطياً فإن $\lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{n+m} = 0$.

أي أن من فرضنا أن $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \dots + \lambda_{n+m} v_{n+m} = 0_{v_1}$

نستنتج أن $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + 0.v_{n+1} + \dots + 0.v_{n+m} = 0_{v_1}$. أي أن

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_{v_1}$. لكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ هو أساس

في $Ker f$ ، فإن $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ ، ومنه نستنتج أن الأشعة

v_{n+m} ، ... ، v_{n+1} ، v_m ، ... ، v_1 مستقلة خطياً .

لكل $v \in V_1$ فإن $f(v) \in Im f$ ، بما أن $\{u_1, \dots, u_m\}$ أساس

لـ $Im f$ ، فإنه توجد $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ ، بحيث $f(v) = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m$.

بما أن f خطي فإن :

$$f[v - (\alpha_1 v_{n+1} + \dots + \alpha_m v_{n+m})] = f(v) - f(\alpha_1 v_{n+1} + \dots + \alpha_m v_{n+m}) =$$

$$= f(v) - (\alpha_1 f(v_{n+1}) + \dots + \alpha_m f(v_{n+m})) = 0_{v_2}$$

فإن : $v - (\alpha_1 v_{n+1} + \dots + \alpha_m v_{n+m}) \in Ker f$

لنفرض $v - (\alpha_1 v_{n+1} + \dots + \alpha_m v_{n+m}) = u \in Ker f$

بما أن $\{v_1, \dots, v_n\}$ عبارة عن أساس في $Ker f$ ، فإنه توجد

$\beta_1, \dots, \beta_n \in K$ بحيث $u = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$.

أي أن : $v - (\alpha_1 v_{n+1} + \dots + \alpha_m v_{n+m}) = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_m$

فإن : $\beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m + \alpha_1 v_{n+1} + \dots + \alpha_m v_{n+m} = v$

نستنتج أن الاشعة $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+m}$ تولد الفضاء V_1 . اي ان $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+m}\}$ هي اساس في الفضاء الشعاعي V_1 ، ومنه نستنتج ان $\dim V_1 = n+m$ ، بما ان $\dim \mathrm{Ker} f = n$ ، $\dim \mathrm{Im} f = m$ فان :

$$\dim V_1 = \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f)$$

(و . هـ . م .)

6.3.2 تعريف

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K ، $f: V_1 \to V_2$ تطبيقاً خطياً ، نسمي بعد $Im(f)$ رتبة التطبيق الخطي f ، ونرمز لها بالرمز $\mathrm{rank}(f)$. ونسمي بعد $\mathrm{Ker} f$ صفرية f ، ونرمز لها بالرمز $\mathrm{nul}(f)$.

7.3.2 نظرية

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين ببعدين منتهين n على نفس الحقل K ، وليكن $f: V_1 \to V_2$ تطبيقاً خطياً فان الشروط التالية متكافئة :

(1) f ايزومورفيزم

(2) f غامر

(3) f متباين

(4) يوجد تطبيق خطي $g: V_2 \to V_1$ بحيث $f \circ g = Id_{V_2}$

(5) يوجد تطبيق خطي $g: V_2 \to V_1$ بحيث $g \circ f = Id_{V_1}$

البرهان :

$(1) \rightarrow (5)$

بما ان f ايزومورفيزم فانه حسب النظرية $(3.2.2)$ f^{-1} ايزومورفيزم ، ليكن $g = f^{-1}$ بذلك فان :

$$g \circ f = f^{-1} \circ f = Id_{V_1}$$

$(5) \rightarrow (3)$

ليكن $g \circ f = Id_{V_1}$ ، لكل $a \in Ker f$ ، فان $f(a) = 0_{V_2}$ ، لكن $a \in V_1$ فان :

$$a = Id_{V_1}(a) = (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(0_{V_2}) = 0_{V_1}$$

اي ان $Ker f = \{0_{V_1}\}$ ، ومنه نستنتج f متباين .

$(3) \rightarrow (1)$

بما أن f تطبيق خطي متباين فان $Ker f = \{0_{V_1}\}$ ، فان $dim(Ker f) = 0$ من هنا نستنتج :

$$dim(Im f) = dim(Im f) + 0 = dim(f(V_1)) + dim(Ker f)$$
$$= dim V_1$$

فمنه نستنتج ان $dim(Im f) = dim V_1 = dim V_2$ ، اي ان f غامر . بذلك فان f ايزومورفيزم .

$(1) \rightarrow (4)$

بما ان f ايزومورفيزم فانه حسب $(3.2.2)$ ، f^{-1} ايزومورفيزم ليكن $g = f^{-1}$ فان :

$$f \circ g = f \circ f^{-1} = Id_{V_2}$$

$(2) \leftarrow (4)$

ليكن $f \circ g = Id_{V_2}$ ولكل $a \in V_2$ فأن :

$$a = Id_{V_2}(a) = (f \circ g)(a) = f(g(a))$$

بما ان $g(a) \in V_1$ ، فأن كل $a \in V_2$ هو صورة لعنصر $g(a)$ من V_1 ، بذلك f يكون غامر .

$(1) \leftarrow (2)$

بما ان f غامر والفضاءان نفس البعد n ، فأن :

$$\dim V_1 = \dim V_2 = \dim(Im f) = \dim(Im f) + 0$$

لكن $\dim V_1 = \dim(Im f) + \dim(Ker f)$

فأن $\dim(Ker f) = 0$ ، اي ان : $Ker f = \{0\}$ ، ومنه f ايزومورفيزم .

(و . هـ . م .)

4.2 فضاء حاصل القسمة

1.4.2 تعريف

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، وليكن V_1 فضاءً شعاعياً جزئياً من الفضاء V . نعرف في الفضاء V العلاقة R كمايلي :

$$\forall v_1, v_2 \in V \quad , \quad v_1 R v_2 \iff v_1 - v_2 \in V_1$$

نلاحظ انه لكل $v \in V$ ، بما ان $v - v = 0 \in V_1$ فأن vRv.
ولكل $v_1, v_2 \in V$ ، إذا كانت $v_1 R v_2$ فأن $v_1 - v_2 \in V$ ومن هنا $v_2 - v_1 \in V_1$ ، اي ان $v_2 R v_1$. ولكل $v_1, v_2, v_3 \in V$ إذا كانت $v_1 R v_2$ و $v_2 R v_3$ فأن $v_1 - v_2 \in V_1$ و $v_2 - v_3 \in V_1$ ، فأن $v_1 - v_3 \in V_1$ ومنه $v_1 R v_3$. نستنتج مما سبق ان R هي علاقة تكافؤ على الفضاء V .
لكل $v \in V$ إذا رمزنا لصنف v بالرمز $\bar{v}$ فأن :

$$\bar{v} = \{ u \in V \ ; \ vRu \}$$

لكل $u, v \in V$ إذا كان $\bar{u} \cap \bar{v} \neq \emptyset$ فأنه يوجد $x \in V$ بحيث $x \in \bar{u} \cap \bar{v}$ فأن $x \in \bar{u}$ و $x \in \bar{v}$ ، ومنه xRu و xRv ، بما ان R علاقة تكافؤ فأن xRu و vRx ومنه نستنتج vRu . لكل $y \in \bar{u}$ فأنه uRy ، لدينا سابقاً vRu ، ومنه نستنتج vRy ، اي ان $y \in \bar{v}$ ، ومنه $\bar{u} \subseteq \bar{v}$. بنفس الطريقة نبرهن ان $\bar{v} \subseteq \bar{u}$ ، وبذلك نستنتج ان $\bar{v} = \bar{u}$.
إذن علاقة التكافؤ هذه تقسم V الى صفوف تكافؤ منفصلة.

ونلاحظ ان: $\bar{v} = \{u \in V \; ; \; uRv\} = \{u \in V \; ; \; u - v \in V_1\}$

$= \{u \in V \; ; \; \exists h \in V_1 \; , \; u - v = h\}$

$= \{u \in V \; ; \; u = v + h\} = v + V_1$

نرمز لمجموعة صفوف التكافؤ بالرمز $H = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots ; v_1, v_2, \dots \in V\}$

نبرهن ان عملية الجمع في الفضاء الشعاعي V منسجمة مع علاقة التكافؤ R المعرفة اعلاه، اي اننا نبرهن:

لكل $v_1, v_2, u_1, u_2 \in V$ اذا كان $v_1 R v_2$ و $u_1 R u_2$، فأن $v_1 + u_1 R v_2 + u_2$.

اذا كان $v_1 R v_2$ فأن $v_1 - v_2 \in V_1$.

واذا كان $u_1 R u_2$ فأن $u_1 - u_2 \in V_1$، لكن V_1 فضاء شعاعي جزئي فأن: $v_1 - v_2 + u_1 - u_2 \in V_1$

اي ان $(v_1 + u_1) - (v_2 + u_2) \in V_1$ فأن $v_1 + u_1 R v_2 + u_2$.

ونبرهن ان عملية الضرب بمقدار سلمي منسجمة مع علاقة التكافؤ R . اي اننا نبرهن لكل $\lambda \in K$ ولكل $v_1, v_2 \in V$ اذا كان $v_1 R v_2$ فأن $\lambda v_1 R \lambda v_2$.

اذا كان $v_1 R v_2$ فأن $v_1 - v_2 \in V_1$، بما ان V_1 فضاء شعاعي جزئي من V، فأنه لكل $\lambda \in K$ ، $\lambda(v_1 - v_2) \in V_1$ اي ان $\lambda v_1 - \lambda v_2 \in V_1$ ومنه $\lambda v_1 R \lambda v_2$.

نعرف عملية الجمع في H كما يلي $\forall \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in H \; , \; \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \overline{v_1 + v_2}$

وعملية الضرب بمقدار سلمي λ كما يلي $\forall \bar{v}_1 \in H \; , \; \lambda \bar{v}_1 = \overline{\lambda v_1}$

بذلك عرفنا في H عملية داخلية هو الجمع، وعملية خارجية هو الضرب بمقدار سلمي ، $\bar{0}$ هو العنصر الحيادي في H ونظير

$\bar{v}$ في H هو $\bar{v}$ - اي ان H هي زمرة تبديلية بالنسبة لعملية الجمع المعرفة اعلاه • وكذلك نلاحظ انه لكل $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in H$ ولكل $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ تتحقق الشروط :

(a) $(\lambda_1+\lambda_2).\bar{v}_1 = \lambda_1.\bar{v}_1 + \lambda_2.\bar{v}_1$

(b) $\lambda_1(\bar{v}_1+\bar{v}_2) = \lambda_1.\bar{v}_1 + \lambda_1.\bar{v}_2$

(c) $\lambda_1(\lambda_2\bar{v}_1) = (\lambda_1\lambda_2)\bar{v}_1$

(d) $1.\bar{v}_1 = \overline{1.v_1} = \bar{v}_1$

فأن H عبارة عن فضاء شعاعي على الحقل K، نسميه فضاء حاصل قسمة الفضاء V على الفضاء الشعاعي الجزئي V_1 ، ونرمز له بالرمز V/V_1 .

2.4.2 نظرية

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، V_1 فضاءً شعاعياً جزئياً من V . وليكن $\chi : V \to V/V_1$ تطبيقاً معرفاً كمايلي : $\forall v \in V \ , \ \chi(v) = \bar{v} = v + V_1$

فأن χ هو تطبيق خطي من V على V/V_1 ، $Ker\,\chi = V_1$.

نسمي هذا التطبيق ، بالتطبيق الخطي القانوني (الطبيعي) من الفضاء V على فضاء حاصل القسمة V/V_1 .

البرهان :

نبرهن χ تطبيق خطي .

$$\forall v_1, v_2 \in V \ ; \ \chi(v_1+v_2) = \overline{v_1+v_2} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \chi(v_1) + \chi(v_2)$$

و $\forall \lambda \in K, \forall v \in V, \ \chi(\lambda v) = \overline{\lambda v} = \lambda \bar{v} = \lambda \chi(v)$

ومنه نستنتج χ تطبيق خطي .

نعلم ان العنصر الحيادي في V/V_1 هو $\bar{0}$ اي ان $\bar{0} = 0 + V_1 = V_1$

لكل $v \in Ker\,\chi$ فان : $\chi(v) = \bar{0} = 0 + V_1 = V_1$

لكن حسب تعريف χ ، $\chi(v) = v + V_1$ اي ان :

$v + V_1 = 0 + V_1$ ومنه $v - 0 = v \in V_1$ فان $Ker\,\chi \subset V_1 \ldots\ldots (1)$

ولكل $v \in V_1$ ، $\chi(v) = v + V_1 = V_1$ اي ان :

$\chi(v) = 0 + V_1 = V_1$

ومنه $\chi(v) = 0 + V_1 = \bar{0}$ فان $v \in Ker\,\chi$.

اذن $V_1 \subset Ker\,\chi \ldots\ldots (2)$. من (1) و (2) نستنتج

$V_1 = Ker\,\chi$.

(و.هـ.م.)

3.4.2 نظرية (حول الهوموموفيزم) .

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K ، وليكن $f: V_1 \to V_2$ تطبيقاً خطياً . فانه يوجد تطبيق خطي وحيد $g: V_1/Ker f \to V_2$ ، بحيث $g \circ \chi = f$ حيث χ هو التطبيق الخطي الطبيعي من الفضاء V_1 على فضاء حاصل القسمة $V_1/Ker f$.

البرهان :

برهنا سابقاً ان $Ker f$ هو فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V_1 ، بذلك فان عناصر فضاء حاصل القسمة

$V_1/\ker f$ يكون بالشكل $v+\ker f$ حيث $v \in V_1$.

وكذلك عندنا $\chi : V_1 \to V_1/\ker f$ هوموموروفيزم غامر، اي

انه لكل $\bar{v} = v + \ker f \in V_1/\ker f$ ليوجد $v \in V_1$ بحيث $\chi(v) = \bar{v}$

نعرف الآن $g : V_1/\ker f \to V_2$ كما يلي :

$$\forall \bar{v} \in V_1/\ker f \quad ; \quad g(\bar{v}) = f(v)$$

نلاحظ ان g لعرف تطبيقا لأن :

(1) لكل $\bar{v} \in V_1/\ker f$ ، $v \in V_1$ ، وبان f تطبيق

فأنه يوجد عنصر وحيد $u \in V_2$ ، بحيث $f(v) = u$ ، اي أن

لكل عنصر $\bar{v}$ من $V_1/\ker f$ ليوجد $f(v) = u$ من V_2 بحيث

$g(\bar{v}) = f(v)$.

(2) لأي $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V_1/\ker f$ إذا كان $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$ فأن $\chi(v_1) = \chi(v_2)$

اي ان $\chi(v_1) - \chi(v_2) = \bar{0}$ ، فأن $\chi(v_1 - v_2) = \bar{0}$ ومنه $v_1 - v_2 \in \ker \chi$

لكن حسب (2.4.2) لدينا $\ker \chi = \ker f$. فأن $v_1 - v_2 \in \ker f$

اي ان $f(v_1 - v_2) = 0$ ، ومنه $f(v_1) - f(v_2) = 0$ ، فأن $f(v_1) = f(v_2)$

ومنه نستنتج : $g(\bar{v}_1) = g(\bar{v}_2)$ ، فأن g تطبيق .

وكذلك لكل $\bar{v}_1 , \bar{v}_2 \in V_1/\ker f$ فأن :

$$g(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = g(\overline{v_1 + v_2}) = f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$$
$$= g(\bar{v}_1) + g(\bar{v}_2)$$

و $\forall \lambda \in K , \forall \bar{v} \in V_1/\ker f , \; g(\lambda \bar{v}) = g(\overline{\lambda v}) = f(\lambda v)$

$$= \lambda f(v) = \lambda g(\bar{v})$$

ومنه نستنتج g خطي .

$$\forall v \in V_1 , (g \circ \chi)(v) = g(\chi(v)) = g(\bar{v}) = f(v)$$

ومنه $g \circ \chi = f$

ليكن $g_1 : V_1/\ker f \to V_2$ اي تطبيق خطي اخر بحيث

$g_1 \circ \chi = f$ فأنه لكل $\bar{v} \in V_1/\ker f$

$$g_1(\bar{v}) = g_1(\chi(v)) = (g_1 \circ \chi)(v) = f(v) = (g \circ \chi)(v) = g(\chi(v))$$
$$= g(\bar{v})$$

ومنه نستنتج $g = g_1$ ، اي ان g وحيد .

(و . هـ . م .)

4.4.2 نظرية (حول الايزومورفيزم)

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K ، وليكن $f : V_1 \to V_2$ تطبيقاً خطياً فأن :

(1) يوجد ايزومورفيزم بين $V_1/\ker f$ و $Im f$.

(2) اذا كان f تطبيقاً خطياً غامراً فأن g يكون ايزومورفيزماً بين $V_1/\ker f$ و V_2 .

البرهان :

(1) نعرف التطبيق g كما في النظرية (3.4.2) فأن :

$$g(V_1/\ker f) = g(\chi(V_1)) = (g \circ \chi)(V_1) = f(V_1) = Im f$$

اي ان $g : V_1/\ker f \to Im f$ غامر

لكل $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V_1/\ker f$ اذا كان $g(\bar{v}_1) = g(\bar{v}_2)$ فأن $f(v_1) = f(v_2)$

اي ان $f(v_1) - f(v_2) = 0$ ومنه $f(v_1 - v_2) = 0$ فأن $v_1 - v_2 \in \ker f$

لكن $\ker f = \ker \chi$ ، فأن $v_1 - v_2 \in \ker \chi$ فأن $\chi(v_1 - v_2) = 0$

اي ان $\chi(v_1) - \chi(v_2) = 0_{V_1/\ker f}$ فأن $\chi(v_1) = \chi(v_2)$ ومنه $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$ ،

اي ان g متباين .

(2) إذا كان f غامر فأن:

$$g(V_1/\ker f) = g(\chi(V_1)) = (g\circ\chi)(V_1) = f(V_1) = V_2$$

وبرهنا في (1) g متباين ، نستنتج ان g ايزومورفيزم.

(و. هـ. م.)

5.2 فضاء التطبيقات الخطية

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K ، ولتكن $L(V_1,V_2)$ مجموعة جميع التطبيقات الخطية من الفضاء V_1 في الفضاء V_2 . المجموعة $L(V_1,V_2)\neq\emptyset$ لأنها تحتوي على الأقل على التطبيق الصفري .

لكل $f_1,f_2\in L(V_1,V_2)$ نعرف f_1+f_2 كمايلي :

$$\forall v\in V_1 \ , \ (f_1+f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v)$$

لنبرهن ان $L(V_1,V_2)$ مغلقة بالنسبة لهذه العملية ، اي ان جمع تطبيقين خطيين كماهو معرف اعلاه، هو تطبيق خطي .

$$\forall \lambda_1,\lambda_2\in K \ , \forall v_1,v_2\in V_1 \ , \ \forall f_1,f_2\in L(V_1,V_2) \ ;$$

$$(f_1+f_2)(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2) = f_1(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2) + f_2(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2) =$$
$$= \lambda_1 f_1(v_1) + \lambda_2 f_1(v_2) + \lambda_1 f_2(v_1) + \lambda_2 f_2(v_2)$$
$$= \lambda_1(f_1(v_1)+f_2(v_1)) + \lambda_2(f_1(v_2)+f_2(v_2))$$
$$= \lambda_1(f_1+f_2)(v_1) + \lambda_2(f_1+f_2)(v_2)$$

ونعرف ضرب تطبيق خطي $f \in L(V_1,V_2)$ بمقدار سلمي λ كما يلي :

$$\forall \lambda \in K\ ,\ \forall v \in V_1\ ,\ \forall f \in L(V_1,V_2)\ ,\ (\lambda f)(v) = \lambda f(v)$$

ونلاحظ ان :

$$\forall \lambda,\lambda_1,\lambda_2 \in K\ ,\ \forall v_1,v_2 \in V_1\ ,\ \forall f \in L(V_1,V_2)\ ;$$

$$(\lambda f)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda(f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)) = \lambda(\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2))$$

$$= \lambda\lambda_1 f(v_1) + \lambda\lambda_2 f(v_2) = \lambda_1((\lambda f)(v_1)) + \lambda_2((\lambda f)(v_2))$$

أي أن الضرب بمقدار سلمي كما هو معرف اعلاه هو تطبيق خطي . نلاحظ ان المجموعة $L(V_1,V_2)$ وعملية جمع التطبيقات زمرة تبديلية لأنه :

(١) لكل $f,g \in L(V_1,V_2)$ ، ولكل $v \in V_1$ ،

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v) = g(v) + f(v) = (g+f)(v)$$

فأن $f+g = g+f$. اي ان عملية جمع التطبيقات تبديلية في $L(V_1,V_2)$.

(٢) لكل $f,g,h \in L(V_1,V_2)$ ولكل $v \in V_1$.

$$(f+(g+h))(v) = f(v) + (g+h)(v) = f(v) + (g(v)+h(v))$$

$$= (f(v)+g(v)) + h(v) = (f+g)(v) + h(v) = ((f+g)+h)(v)$$

فأن $f+(g+h) = (f+g)+h$ اي ان عملية جمع التطبيقات تجميعية في $L(V_1,V_2)$.

(٣) حسب (2.1،2) يوجد التطبيق الصفري $f_0 \in L(V_1,V_2)$ بحيث لكل $v \in V_1$ ،

$$(f+f_0)(v) = f(v) + f_0(v) = f(v) + 0 = f(v)$$

فأن $f + f_0 = f$ ، ومنه f_0 هو العنصر الحيادي بالنسبة لعملية جمع التطبيقات في $L(V_1, V_2)$.

(4) لكل $f \in L(V_1, V_2)$ ولكل $v \in V_1$ ، $f(v) \in V_2$

فأن $-f(v) \in V_2$ وان : $f(v) + (-f(v)) = 0 = f_0(v)$

اي ان $(f + (-f))(v) = f_0(v)$ ومنه $f + (-f) = f_0$

اي ان $-f$ هو العنصر النظير بالنسبة لعملية جمع التطبيقات في $L(V_1, V_2)$.

ونلاحظ كذلك :(1) لكل $f \in L(V_1, V_2)$ ولكل $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ ولكل $v \in V_1$ ،

$$((\lambda_1 + \lambda_2) f)(v) = (\lambda_1 + \lambda_2) f(v) = \lambda_1 (f(v)) + \lambda_2 (f(v))$$
$$= (\lambda_1 f)(v) + (\lambda_2 f)(v) = (\lambda_1 f + \lambda_2 f)(v)$$

فأن $(\lambda_1 + \lambda_2) f = \lambda_1 f + \lambda_2 f$.

وبنفس الطريقة نبرهن :

(2) لكل $f, g \in L(V_1, V_2)$ و لكل $\lambda_1 \in K$ ،

$$\lambda_1 (f + g) = \lambda_1 f + \lambda_1 g$$

(3) لكل $f \in L(V_1, V_2)$ ولكل $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ ،

$$(\lambda_1 \lambda_2)(f) = \lambda_1 (\lambda_2 f)$$

(4) لكل $f \in L(V_1, V_2)$ ، $1 . f = f$.

نستنتج مما سبق ان $L(V_1, V_2)$ وهاتين العمليتين هو فضاء شعاعي على الحقل K ، ويسمى بفضاء التطبيقات الخطية .

6.2 الفضاء الثنوي والأساس الثنوي .

1.6.2 تعريف

ليكن V فضاء شعاعياً على الحقل K . كل تطبيق خطي $f: V \to K$ يسمى شكلاً خطياً . نرمز لمجموعة جميع الأشكال الخطية من V في K بالرمز $L(V, K)$.

2.6.2 مثال

ليكن $\mathbb{R}^n$ فضاءً شعاعياً على الحقل $\mathbb{R}$ ، ولتكن $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ مقادير سلمية و $\{v_1, \ldots, v_n\}$ اساساً في الفضاء $\mathbb{R}^n$. فأن التطبيق $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ المعرف بالشكل التالي:

$$\forall v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \in \mathbb{R}^n \ , \ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \ ,$$

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_n \alpha_n$$

هو شكل خطي من $\mathbb{R}^n$ في $\mathbb{R}$ لأنه :

$$\forall v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \ , \ u = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n \ , \ \lambda_i, \beta_i \in \mathbb{R}$$

فأن

$$f(v+u) = f((\lambda_1+\beta_1)v_1 + \cdots + (\lambda_n+\beta_n)v_n) =$$

$$= (\lambda_1+\beta_1)\alpha_1 + \cdots + (\lambda_n+\beta_n)\alpha_n = (\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n) + (\beta_1\alpha_1 + \cdots + \beta_n\alpha_n)$$

$$= f(v) + f(u)$$

وكذلك

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \ , \ f(\lambda v) = f(\lambda\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda\lambda_n v_n) = (\lambda\lambda_1)\alpha_1 + \cdots + (\lambda\lambda_n)\alpha_n$$

$$= \lambda(\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n) = \lambda f(v)$$

3.6.2 تعريف

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K . كما في (5.2) برهنا ان $L(V,K)$ هو فضاء شعاعي على الحقل K . نسمي هذا الفضاء ، بالفضاء الثنوي للفضاء V ونرمز له بالرمز V^* .

4.6.2 نظرية

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ذي بعد n ، فأن V^* ايزومورفية مع K^n .

البرهان :

لتكن $\{v_1,\dots,v_n\}$ اساساً في الفضاء الشعاعي V ، لكل $f\in L(V,K)$ نعرف $f:V\to K$ كمايلي :

$$\forall v\in V\ ,\ \exists \lambda_1,\dots,\lambda_n\in K\ ;\ v=\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n\ ;$$

$$f(v)=f(\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n)=\lambda_1\alpha_1+\dots+\lambda_n\alpha_n\ ,\ \alpha_1,\dots,\alpha_n\in K$$

نلاحظ ان f عبارة عن شكل خطي يحقق $f(v_i)=\alpha_i$ لكل i حيث $i=1,\dots,n$. لنرمز للشكل الخطي بالرمز $f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}$.

لنعرف $g:K^n\to L(V,K)$ كمايلي :

$$\forall(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in K^n\ ,\ g(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}$$

لكل $(\beta_1,\dots,\beta_n),(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in K^n$ واذا كان :

$(\beta_1,\dots,\beta_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ فأن $\alpha_i=\beta_i$ لكل $i=1,\dots,n$.

من هنا فأنه لكل $v=\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n\in V$ فأن :

$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n=\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_n\beta_n$$

أي أن :

$$f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}(\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_nv_n)=f_{(\beta_1,\dots,\beta_n)}(\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_nv_n)$$

فأن

$$\forall v\in V\ ,\quad f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}(v)=f_{(\beta_1,\dots,\beta_n)}(v)$$

ومنه $g(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=g(\beta_1,\dots,\beta_n)$ أي أن g تطبيق .

$$\forall(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(\beta_1,\dots,\beta_n)\in K^n\ ;\ g(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}$$

$$g(\beta_1,\dots,\beta_n)=f_{(\beta_1,\dots,\beta_n)}\quad \text{و}$$

$$\forall v=\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_nv_n\in V,\quad \lambda_i\in K\ ,\ f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}(v)+f_{(\beta_1,\dots,\beta_n)}(v)=$$
$$=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n+\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_n\beta_n=\lambda_1(\alpha_1+\beta_1)+\cdots+\lambda_n(\alpha_n+\beta_n)$$
$$=f_{(\alpha_1+\beta_1,\dots,\alpha_n+\beta_n)}(v)$$

فأن

$$f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}+f_{(\beta_1,\dots,\beta_n)}=f_{(\alpha_1+\beta_1,\dots,\alpha_n+\beta_n)}$$

من هنا فأن :

$$g((\alpha_1,\dots,\alpha_n)+(\beta_1,\dots,\beta_n))=g(\alpha_1+\beta_1,\dots,\alpha_n+\beta_n)=$$
$$=f_{(\alpha_1+\beta_1,\dots,\alpha_n+\beta_n)}=f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}+f_{(\beta_1,\dots,\beta_n)}=g(\alpha_1,\dots,\alpha_n)+g(\beta_1,\dots,\beta_n)$$

وكذلك لكل $\lambda\in K$ فأن :

$$f_{(\lambda\alpha_1,\dots,\lambda\alpha_n)}(v)=\lambda_1(\lambda\alpha_1)+\cdots+\lambda_n(\lambda\alpha_n)=\lambda(\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n)$$
$$=\lambda f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}(v)$$

فأنه $g(\lambda(\alpha_1,\dots,\alpha_n))=g(\lambda\alpha_1,\dots,\lambda\alpha_n)=f_{(\lambda\alpha_1,\dots,\lambda\alpha_n)}$

$$= \lambda f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} = \lambda g(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$$

فأن g هو تطبيق خطي .

لكل $f \in V^*$ ولكل $i = 1,\dots,n$ فأن :

$$f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}(v_i) = f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n)}(0.v_1 + \dots + 1.v_i + \dots + 0.v_n)$$
$$= 1.\alpha_i = \alpha_i$$

اي ان : $f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}(v_i) = \alpha_i$ ، حيث $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in K^n$

اي انه لكل $f \in V^*$ توجد مقادير سلمية $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in K^n$ بحيث

$f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}(v_i) = \alpha_i$ ، اي انه لكل $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in V$ فأن :

$$f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n$$

اي انه لكل $f \in V^*$ توجد $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in K^n$ بحيث :

$g(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}$ فأن g غامر .

وأخيرا لكل $(\alpha_1,\dots,\alpha_n), (\beta_1,\dots,\beta_n) \in K^n$ اذا كان

$f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} = f_{(\beta_1,\dots,\beta_n)}$ فأن $g(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = g(\beta_1,\dots,\beta_n)$

فأنه لكل $i = 1,\dots,n$ ، $f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}(v_i) = f_{(\beta_1,\dots,\beta_n)}(v_i)$

اي ان $\alpha_i = \beta_i$ لكل $i = 1,\dots,n$.

فأن $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = (\beta_1,\dots,\beta_n)$ ومنه g متباين .

لذلك نستنتج V^* ، K^n ايزومورفزميان .

(و . ه . م .)

5.6.2 نتيجة

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، فأن V ، V^* لهما نفس البعد ، وصورة اساس في V هي أساس في V^* ، لأنه إذا كان $\dim V = n$ فأن $K^n \simeq V$ ، $K^n \simeq V^*$ فأن $V \simeq V^*$. اي ان V ، V^* لهما نفس البعد وصورة اساس في V هي اساس في V^* .

6.6.2 نظرية

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، ولتكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ اساساً في V ، وليكن $f_1, \dots, f_n \in V^*$ بحيث أن:

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{عندما } i = j \\ 0 & \text{عندما } i \neq j \end{cases} \quad \text{لكل } i, j = 1, \dots, n$$

فأن $\{f_1, \dots, f_n\}$ اساس للفضاء V^*

البرهان :

لكل $f \in V^*$ فأنه لـ $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ ولكل $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

فأن :
$$f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n$$

و $f(v_i) = \alpha_i$ لكل $i = 1, \dots, n$.

فأنه لكل $i = 1, \dots, n$:

$$(\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n)(v_i) = \alpha_1 f_1(v_i) + \dots + \alpha_n f_n(v_i) = \alpha_i \cdot 1 = \alpha_i = f(v_i)$$

ومنه فأن $f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$ اي ان : $V^* = [f_1, \dots, f_n]$.

لكل $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ إذا كان $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = f_0 = 0_{V^*}$

فأنه لكل $i=1,\dots,n$ ، $(\alpha_1 f_1+\dots+\alpha_n f_n)(v_i) = f_0(v_i) = 0$

لكن $f_j(v_i)=0$ عندما $i\neq j$ و $f_j(v_i)=1$ عندما $i=j$

فأن $\alpha_i f_i(v_i) = \alpha_i \cdot 1 = \alpha_i = 0$ لكل $i=1,\dots,n$ ، اي ان $f_1,\dots,f_n$ مستقلة خطياً ، وبذلك فأن المجموعة $\{f_1,\dots,f_n\}$ هي اساس للفضاء V^* .

(و . هـ . م .)

2 . 6 . 7 تعريف

الاساس $\{f_1,\dots,f_n\}$ للفضاء الثنوي V^* في النظرية (2 . 6 . 6) نسميه الاساس الثنوي للأساس $\{v_1,\dots,v_n\}$.

2 . 6 . 8 مثال

لنأخذ الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ على الحقل $\mathbb{R}$ ، والمجموعة $\{v_1=(2,1), v_2=(0,3)\}$ اساساً للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$.

نبحث عن شكلين خطيين f_1 ، f_2 على $\mathbb{R}^2$ بحيث $f_1(v_1)=1$ ، $f_1(v_2)=0$ ، $f_2(v_1)=0$ ، $f_2(v_2)=1$. نعرف f_1 ، f_2 كمايلي :

$$\forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \;;\; f_1(x_1,x_2) = ax_1+bx_2 \;,\; f_2(x_1,x_2) = cx_1+dx_2$$

من هنا فأن : $f_1(v_1) = f_1(2,1) = 2a+b = 1$ ، $f_1(v_2) = f_1(0,3) = 0+3b = 0$

ومنه نستنتج أن $a=1/2$ ، $b=0$.

ومن $f_2(v_1) = f_2(2,1) = 2c+d = 0$ ، $f_2(v_2) = f_2(0,3) = 0+3d = 1$

نستنتج أن $c=-1/6$ ، $d=1/3$. فأن الاساس الثنوي هو $\{f_1,f_2\}$ حيث f_1 ، f_2 هما شكلان خطيان معرفان من $\mathbb{R}^2$ في $\mathbb{R}$ كمايلي: $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f_1(x,y) = ax+by = 1/2\,x$, $f_2(x,y) = cx+dy = -1/6\,x + 1/3\,y$

2 . 7 الأشكال متعددة الخطية

2 . 7 . 1 تعريف

ليكن V ، $V_1,\dots,V_n$ فضاءات شعاعية على نفس الحقل K ، وليكن $f : V_1 \times \dots \times V_n \to V$ تطبيقاً يحقق مايلي:

$\forall (v_1,\dots,v_n) , (v'_1,\dots,v'_n) \in V_1 \times \dots \times V_n \ , \ \forall \lambda \in K \ ; \forall i=1,\dots,n$

(1) $f(v_1,\dots,v_i+v'_i,\dots\dots\dots,v_n) = f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n) + f(v_1,\dots,v'_i,\dots,v_n)$

(2) $f(v_1,\dots,\lambda v_i,\dots,v_n) = \lambda f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n)$

نقول عندئذ ان f عبارة عن تطبيق متعدد الخطية من الدرجة n .

وإذا كان $V_1 = \dots = V_n = V$ نسمي f عندئذ، تطبيق متعدد الخطية من الدرجة n على الفضاء V .

2 . 7 . 2 تعريف

ليكن $V_1,\dots,V_n$ فضاءات شعاعية على الحقل K.

التطبيق $f : V_1 \times \dots \times V_n \to K$ الذي يحقق الشرطين (1)، (2) من (2 . 7 . 1) يسمى بشكل متعدد الخطية من الدرجة n .

ملاحظة

إذا كان $n=2$ في (2 . 7 . 1) ، (2 . 7 . 2) عندئذ نسمي $f : V_1 \times V_2 \to V$ بتطبيق مزدوج الخطية ، $f : V_1 \times V_2 \to K$ بشكل ثنائي الخطية ، وإذا كان $n=3$ عندئذ نسمي $f : V_1 \times V_2 \times V_3 \to V$ بتطبيق ثلاثي الخطية و $f : V_1 \times V_2 \times V_3 \to K$ بشكل ثلاثي الخطية .

3.7.2 تعريف

ليكن f شكلاً متعدد الخطية من الدرجة n ، نقول أن f متناوب إذا كان $f(v_1,\dots,v_n)=0$ كلما تساوى اثنان من الأشعة $v_1,\dots,v_n$.

4.7.2 نظرية

ليكن f شكلاً متعدد الخطية، ومتناوباً، من الدرجة n على الفضاء الشعاعي V على الحقل K ، فإن قيمة $f(v_1,\dots,v_n)$ تضرب بالعدد 1- كلما جرى تبديل بين اثنين من الأشعة $v_1,\dots,v_n$.

البرهان :

بما أن f متناوب فإنه لكل v_i ، v_j ، $i\neq j$

$$f(v_1,\dots,v_i+v_j,\dots,v_j+v_i,\dots,v_n)=0$$

لكن f متعدد الخطية من الدرجة n فإن :

$$f(v_1,\dots,v_i+v_j,\dots,v_j+v_i,\dots,v_n)=f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n)+f(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_n)+f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_i,\dots,v_n)+f(v_1,\dots,v_j,\dots,v_j,\dots,v_n)=0$$

بما أن f متناوب فإن :

$$f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_i,\dots,v_n)=0 \quad , \quad f(v_1,\dots,v_j,\dots,v_j,\dots,v_n)=0$$

فإن : $f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n)+f(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_n)=0$

ومنه نستنتج $f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n)=-f(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_n)$

(و.هـ.م)

5.7.2 نظرية

ليكن f شكلاً متعدد الخطية من الدرجة n ومتناوباً على الفضاء V . إذا كانت الأشعة $v_1,\dots,v_n \in V$ مرتبطة خطياً فأن $f(v_1,\dots,v_n)=0$

البرهان :

بما ان $v_1,\dots,v_n$ مرتبطة خطياً ، فأنه حسب النظرية (6.4.1) يمكن كتابة احد الأشعة بشكل مزج خطي للبقية. لنفرض ان v_1 هو مزج خطي لبقية الأشعة ، فأنه توجد مقادير سلمية $\lambda_2,\dots,\lambda_n \in K$ بحيث : $v_1=\lambda_2 v_2+\dots+\lambda_n v_n$

فأن :

$$f(v_1,\dots,v_n)=f(\lambda_2 v_2+\dots+\lambda_n v_n ,\ v_2,\dots,v_n)$$

بما ان f شكل متعدد الخطية فأن :

$$f(\lambda_2 v_2,\dots,\lambda_n v_n , v_2,\dots,v_n)=\lambda_2 f(v_2 , v_2,\dots,v_n)+\lambda_3 f(v_3 , v_2 , v_3,\dots,v_n)$$
$$+\dots+\lambda_n f(v_n , v_2 , v_3,\dots,v_n)$$

بما ان f متناوب فأن :

$$f(v_2 , v_2 ,\dots, v_n)=f(v_3 , v_2 , v_3,\dots v_n)=\dots=f(v_n , v_2,\dots, v_n)=0$$

اي ان :

$$f(v_1,\dots,v_n)=\lambda_2 \cdot 0+\lambda_3 \cdot 0+\dots+\lambda_n \cdot 0 \ =0$$

ومنه نستنتج ان $f(v_1,\dots,v_n)=0$

(و.هـ.م.)

6.7.2 نظرية

ليكن f شكلاً متعدد الخطية من الدرجة n ومتناوباً على الفضاء V ، ولتكن $v_1,\dots,v_n$ اشعة من V. فان قيمة $f(v_1,\dots,v_n)$ لا تتغير عندما نضيف الى اي شعاع v_i مزجاً خطياً للأشعة الباقية v_j حيث $j\neq i$.

البرهان :

ليكن y مزجاً خطياً للأشعة v_j حيث $j\neq i$. فانه توجد مقادير سلمية $\lambda_1,\dots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\dots,\lambda_n$ ، بحيث :

$$y=\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_{i-1}v_{i-1}+\lambda_{i+1}v_{i+1}+\dots+\lambda_n v_n$$

و $f(v_1,\dots,v_i+y,\dots,v_n)=f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n)+f(v_1,\dots,y,\dots,v_n)$

بما ان f متناوب فان : $f(v_1,\dots,y,\dots,v_n)=0$

اي ان : $f(v_1,\dots,v_i+y,\dots,v_n)=f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n)$

(و.هـ.م.)

- تمارين -

(1) بين أياً من التطبيقات التالية عبارة عن تطبيق خطي :-

(a) $f: V \to V$ معرفاً كالآتي ، $\forall v \in V \; , \; f(v) = -v$

(b) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ معرفاً كالآتي ، $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2)$

(c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفاً كالآتي ، $f(x) = x^3$

(d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفاً كالآتي ، $f(x) = 2x+3$

(2) ليكن $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ تطبيقاً معرفاً كالآتي : $f(z) = \bar{z}$.
اثبت ان f عبارة عن تطبيق خطي عندما $\mathbb{C}$ يكون فضاءاً شعاعياً على الحقل $\mathbb{R}$ ، لكنه لا يكون تطبيقاً خطياً عندما $\mathbb{C}$ يكون فضاءاً شعاعياً على الحقل $\mathbb{C}$.

(3) اوجد $\mathrm{Ker} f$ ، $\mathrm{Im} f$ اذا كان :

(a) $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ معرفاً كالآتي : $f(z_1, z_2) = (z_1 + z_2 \, , \, 2z_1 + 2z_2)$

(b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ معرفاً كالآتي : $f(x, y) = x - y$

(4) ليكن $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ تطبيقاً خطياً معرفاً كالآتي : لكل $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ، $f(x, y) = (x+y \, , \, x-y)$. اثبت ان f ايزومورفيزم.

(5) ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي V على الحقل K ، وليكن $V = V_1 \oplus V_2$ ، أثبت

أن $V/V_1 \simeq V_2$.

(6) ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي V على الحقل K .حيث $V=V_1 \oplus V_2$ وليكن التطبيق $f : V_1 \oplus V_2 \to V_1$ معرفاً كمايلي :

$$\forall x_1 \in V_1 \ , \ \forall x_2 \in V_2 \ , \quad f(x_1 + x_2) = x_1$$

(a) برهن ان f تطبيق خطي .

(b) اوجد $Ker f$ ، $Im f$.

(7) ليكن $f : IR^3 \to IR^3$ حيث IR^3 فضاء شعاعي على الحقل IR معرفاً كمايلي :

$$\forall (x,y,z) \in IR^3 \ , \quad f(x,y,z) = (x \ , \ 2x+z \ , \ y+z)$$

هل ان ؟ $\dim IR^3 = \dim(Ker f) + \dim(Im f)$

برهن جوابك .

(8) ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل IR وليكن $f : V \to IR$ ، $g : V \to IR$ تطبيقين خطيين ، وليكن $h : V \to IR^2$ تطبيقاً معرفاً كمايلي :

$$\forall v \in V \ , \ h(v) = (f(v) \ , \ g(v))$$

هل ان h تطبيق خطي ؟ برهن جوابك .

(9) ليكن $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تطبيقاً خطياً معرفاً كمايلي :

$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 \, , \, x_1 + x_3 \, , \, x_1 - x_3)$

(a) احسب $f(e_1)$ ، $f(e_2)$ ، $f(e_3)$ حيث $\{e_1, e_2, e_3\}$ عبارة عن الأساس النظامي في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$.

(b) اثبت ان $f(e_1)$ ، $f(e_2)$ ، $f(e_3)$ اشعة مستقلة خطياً، مستنتجاً ان f تقابلي .

(c) اوجد صورة الشعاع x بواسطة التطبيق $f^2 = f \circ f$.

(10) ليكن $\mathbb{R}^2$ ، $\mathbb{C}$ فضاءين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{R}$ وليكن $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ تطبيقاً معرفاً كمايلي :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad f(x, y) = x + iy$

(a) برهن ان f تطبيق خطي .

(b) اوجد $\text{Ker} f$ ، $\text{Im} f$ هل ان f ايزومورفزم ؟ .

(c) اذا كان $\{e_1 = (1,0) \, , \, e_2 = (0,1)\}$ اساساً في $\mathbb{R}^2$ فأوجد اساساً في $\mathbb{C}$.

(d) برهن ان : $\dim \mathbb{R}^2 = \dim(\text{Ker} f) + \dim(\text{Im} f)$

(11) ليكن $\mathbb{R}^3$ فضاءً شعاعياً على الحقل $\mathbb{R}$.

(a) بين ان الأشعة $x_1 = (1,7,1)$ ، $x_2 = (1,7,4)$ مستقلة خطياً في $\mathbb{R}^3$.

(b) اوجد شعاعاً ثالثاً بحيث يكون $\{x_1, x_2, x_3\}$ اساساً لـ $\mathbb{R}^3$.

(c) نفرض ان $\{b_1 = (1,2,3) \, , \, b_2 = (3,4,6) \, , \, b_3 = (3,1,1)\}$ اساساً في $\mathbb{R}^3$ ونفرض وجود التطبيق الخطي $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ الذي من أجله يكون

$h(b_1) = -2$ ، $h(b_2) = 5$ ، $h(b_3) = -3$. اوجد قيمة $h(0,1,2)$.

(12) ليكن $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تطبيقاً خطياً معرفاً كالآتي :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,, \quad h(x,y,z) = (0, x+y \,, x+y+z)$$

(a) اوجد $\ker h$.

(b) هل h متباين ؟ بين لماذا $\ker h$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$ ؟ .

(c) اوجد $\dim(\ker h)$.

(13) ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي V على الحقل K وذي ابعاد منتهية ، ولكن $f: V_1 \times V_2 \to V$ معرفاً كالآتي :

$$\forall (x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 \,, \quad f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 .$$

(a) تحقق من كون f خطي .

(b) احسب $\ker f$ واستنتج ان $\ker f$ ايزومورفية مع $V_1 \cap V_2$.

(c) احسب $\operatorname{Im} f$ وبرهن ان :

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

(14) ليكن $f: V_1 \to V_2$ تطبيقاً خطياً . واذا كانت الأشعة $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ مستقلة خطياً في V_2 فبرهن ان $v_1, \ldots, v_n$ مستقلة خطياً في V_1 . واذا كانت الاشعة $v_1, \ldots, v_n$ مرتبطة خطياً في V_1 فبرهن ان $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ مرتبطة خطياً في V_2.

(15) ليكن V_n ، ... ، V_2 ، V_1 فضاءات شعاعية جزئية من الفضاء الشعاعي V على الحقل K ، بحيث

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$$

برهن ان :

$$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2 + \cdots + \dim V_n$$

(16) ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ولتكن $\{a_1, a_2, a_3\}$ اساساً للفضاء V ، وليكن f تطبيقاً خطياً من V في نفسه .

(a) برهن ان f يكون معروف تماماً اذا علمت القيم $f(a_1)$ ، $f(a_2)$ ، $f(a_3)$.

(b) لنفرض ان $f(a_1) = a_2 + a_3$ ، $f(a_2) = a_1 + a_3$ ، $f(a_3) = a_1 + a_2$

اوجد $f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3)$.

(c) برهن ان f متباين وغامر .

(d) اوجد f^{-1} .

(e) اوجد $\operatorname{Ker} f^{-1}$.

(17) ليكن $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ، $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ تطبيقين خطيين معرفين كالآتي :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_2) \quad ,$$

$$, \quad g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 0)$$

احسب $2f$ ، $f \circ g + f^3 + 3g$ حيث $f^3 = f \circ f \circ f$. اي من التطبيقين f ، g عبارة عن ايزومورفيزم للفضاء $\mathbb{R}^2$ على $\mathbb{R}^2$ ؟

(18) ليكن $\mathbb{R}^n$ فضاءاً شعاعياً على الحقل $\mathbb{R}$ ، وليكن :

$x = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ ، $y = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n$

حيث $\{v_1, \ldots, v_n\}$ عبارة عن اساس للفضاء $\mathbb{R}^n$ وليكن $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

تطبيقاً معرفاً كالآتي : $f(x,y) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$

اثبت ان f هو شكل مزدوج الخطية .

(19) ليكن g ، h شكلين خطيين من الفضاء الشعاعي V على الحقل K ، وليكن $f : V \times V \to K$ معرفاً كالآتي : $f(v_1, v_2) = g(v_1)h(v_2)$

برهن ان f شكل مزدوج الخطية . هل ان f متناوب ؟ .

(20) ليكن $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ معرفين كالآتي .

$h(x,y) = 3x - y$ ، $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ g(x,y) = x - y$

(a) برهن ان g ، h خطيان .

(b) برهن ان $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرف بالشكل التالي :

$f((x_1,y_1), (x_2,y_2)) = g(x_1,y_1)h(x_2,y_2)$ هو تطبيق مزدوج الخطية .

(21) ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، وليكن V_1 فضاءاً شعاعياً جزئياً من V ، لكل $a \in V$ نعرف $a + V_1 = \{a + x : x \in V_1\}$

ونسميها مجموعة مشاركة للفضاء الشعاعي الجزئي V_1 المحدد من قبل العنصر a.

نرمز لمجموعة جميع المجاميع المشاركة بالنسبة لـ V_1 بالرمز $\mathcal{V}$ ، ولنعرف عملية جمع مجموعتين مشاركتين والضرب بمقدار سلمي كما يلي :

$\forall a,b \in V ;\ (a+V_1) + (b+V_1) = (a+b) + V_1$ ، $\forall \lambda \in K ,\ \lambda(a+V_1) = \lambda a + V_1$

(a) برهن ان $\mathcal{V}$ هو فضاء شعاعي على الحقل K بالنسبة لهاتين العمليتين.

(b) برهن ان $a - b \in V_1 \iff a + V_1 = b + V_1$ لاحظ $\mathcal{V} = V/V_1$.

(22) في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ على الحقل $\mathbb{R}$. لتكن $V_1 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ فضاءاً شعاعياً جزئياً من $\mathbb{R}^2$ ، اوجد $\mathbb{R}^2/V_1$.

الفصل الثالث
المصفوفات والمحددات

1.3 خواص أولية

1.1.3 تعريف

ليكن K حقلاً، وليكن m ، n عددين طبيعيين، ولنأخذ جميع المقادير السلمية a_{ij} من الحقل K حيث $i = 1, \dots, m$ ، $j = 1, \dots, n$ ولنشكل الجدول التالي :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

نسمي هذا الجدول مصفوفة . نسمي مجموعة العناصر التي لها نفس الدليل الأول سطراً ، ومجموعة العناصر التي لها نفس الدليل الثاني عموداً ، ونقول عندئذ ان المصفوفة هي ذات m سطر و n عمود .

نلاحظ ان a_{ij} هو عنصر من الحقل K وبذلك فإننا نعتبر أعمدة المصفوفة اعلاه أشعة من الفضاء K^m ، وأسطر المصفوفة اعلاه أشعة من الفضاء K^n . لنلاحظ ان العنصر a_{ij} هو عنصر من المصفوفة يقع في السطر i والعمود j . نرمز عادة للمصفوفات بالأحرف A ، B ، ... الخ . ونرمز لمصفوفة كهذه عادة بالرمز $A = (a_{ij})$.

نسمي المصفوفة التي عدد أسطرها m وعدد أعمدتها n بمصفوفة من الدرجة $m \times n$. ونرمز لمجموعة المصفوفات ذي m سطراً و n عموداً ذي العناصر من الحقل K بالرمز $M_{m,n}(K)$.

نقول عن المصفوفتين $A=(a_{ij})$ ، $B=(b_{ij})$ من المجموعة $M_{m,n}(K)$ انهما متساويتان ، إذا كانت عناصرهما المناظرة متساوية ، اي انه $a_{ij}=b_{ij}$ لكل $i=1,\dots,m$ ، $j=1,\dots,n$.

نلاحظ هنا ان المصفوفتين المتساويتين يجب ان تكونا من نفس الدرجة.

2.1.3 تعريف

نقول عن المصفوفة $A=(a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ بأنها مصفوفة صفرية إذا كان $a_{ij}=0$ لكل $i=1,\dots,m$ ، $j=1,\dots,n$.

نقول عن المصفوفة $A=(a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ بأنها مصفوفة مربعة إذا كان $n=m$ ، عندئذ يسمى n بدرجة المصفوفة A .

وتسمى العناصر a_{11} ، a_{22} ، ... ، a_{nn} بالقطر الرئيسي للمصفوفة A.

نسمي المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

والتي تكون عناصرها الواقعة تحت القطر الرئيسي اصفاراً ، بمصفوفة مثلثية علوية .

ونسمي المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

والتي تكون عناصرها الواقعة فوق القطر الرئيسي اصفاراً ، بمصفوفة مثلثية سفلية .

ونسمي المصفوفة التي تكون جميع عناصرها اصفاراً عدا القطر الرئيسي، مصفوفة قطرية .

ونسمي المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

مصفوفة سلمية،

وعندما $\lambda = 1$ نقول ان A هي مصفوفة الوحدة ، ونرمز لها بالرمز I_n .

نقول عن المصفوفة $A = (a_{ij})$ انها مصفوفة متماثلة اذا كان $a_{ij} = a_{ji}$ لكل i,j .

2.3 المصفوفات والتطبيقات الخطية

1.2.3 تعريف .

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K ببعدين n ، m على التوالي . ولتكن $\{v_1, \ldots, v_n\}$ اساساً في V_1 ، $\{u_1, \ldots, u_m\}$ أساساً في V_2 . وليكن $f: V_1 \to V_2$ تطبيقاً خطياً ، فأن $f(v_1), \ldots, f(v_n) \in V_2$ اي ان :

$$f(v_1) = a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + \cdots + a_{m1} u_m$$

$$f(v_2) = a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + \cdots + a_{m2} u_m$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(v_n) = a_{1n} u_1 + a_{2n} u_2 + \cdots + a_{mn} u_m$$

حيث $a_{ij} \in K$.

فأن المصفوفة
$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$
تسمى المصفوفة

المرافقة للتطبيق الخطي f بالنسبة للأساس $\{v_1,\ldots,v_n\}$ في V_1 والاساس $\{u_1,\ldots,u_n\}$ في V_2 . ولنقول بأختصار المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f واذا كان اساس V_1 ، V_2 معلومين . ويقال عن f انه التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A .

نلاحظ ان العمود j في هذه المصفوفة هو مركبات الشعاع v_j وفق التطبيق الخطي f في الاساس $\{u_1,\ldots,u_m\}$. اي ان عدد الأعمدة في المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f هو عدد اشعة اساس V_1 الذي هو n ، بينما عدد الاسطر في المصفوفة A يحددها عدد اشعة اساس V_2 والذي هو m. نرمز أحياناً للمصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f بالرمز $M(f)$.

من التعريف فأنه واذا كان V_1 فضاءً شعاعياً ذا بعد n على الحقل K ، V_2 فضاءً شعاعياً ذا بعد m على الحقل K، فأنه لكل $f\in L(V_1,V_2)$ توجد مصفوفة $A\in M_{m,n}(K)$ مرافقة لهذا التطبيق الخطي، وبذلك فأنه $\varphi : L(V_1,V_2)\rightarrow M_{m,n}(K)$ والمعرف كمايلي :

$$\forall f\in L(V_1,V_2) \quad , \quad \varphi(f)=M(f)=A$$

حيث $A\in M_{m,n}(K)$ ، هو تطبيق لأنه :

لكل $f,g\in L(V_1,V_2)$ لنفرض ان $A=(a_{ij})$ مصفوفة مرافقة للتطبيق الخطي f ، $B=(b_{ij})$ مصفوفة مرافقة للتطبيق الخطي

g ، فأذا كان $f=g$ فأن $f(v_j)=g(v_j)$ لكل $j=1,\dots,n$ فأن:

$$a_{1j}u_1+\dots+a_{mj}u_m=b_{1j}u_1+\dots+b_{mj}u_m$$

على فرض ان $\{u_1,\dots,u_m\}$ اساس في V_2 فأن :

$$(a_{1j}-b_{1j})u_1+\dots+(a_{mj}-b_{mj})u_m=0$$

فأن $a_{ij}-b_{ij}=0$ لكل $i=1,\dots,m$ ، $j=1,\dots,n$ ومنه نستنتج ان $a_{ij}=b_{ij}$ لكل $i=1,\dots,m$ ، $j=1,\dots,n$ ؛ فأن $A=B$ وبذلك $\varphi(f)=\varphi(g)$.

وبالعكس لتكن

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

مصفوفة من $M_{m,n}(K)$

ولنأخذ K^n وأساسه النظامي $\{e_1,\dots,e_n\}$ ، K^m وأساسه النظامي $\{l_1,\dots,l_m\}$ ، ولنأخذ الأشعة $y_1,\dots,y_n\in K^m$ فأنه يوجد $b_{ij}\in K$ بحيث :

$$y_1=b_{11}l_1+b_{21}l_2+\dots+b_{m1}l_m$$
$$y_2=b_{12}l_1+b_{22}l_2+\dots+b_{m2}l_m$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_n=b_{1n}l_1+b_{2n}l_2+\dots+b_{mn}l_m$$

فأنه حسب (1.3.2) يوجد تطبيق خطي وحيد $f:K^n\to K^m$ بحيث $f(e_i)=y_i$ لكل $i=1,\dots,n$.

من هنا فأن :

$$f(e_1)=b_{11}l_1+b_{21}l_2+\dots+b_{m1}l_m$$
$$f(e_2)=b_{12}l_1+b_{22}l_2+\dots+b_{m2}l_m$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f(e_n)=b_{1n}l_1+b_{2n}l_2+\dots+b_{mn}l_m$$

وحيث ان $\{e_1,\dots,e_n\}$ اساس في K^n و $\{l_1,\dots,l_m\}$ اساس في K^m ، فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f هي :

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2n} \\ \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} \dots b_{mn} \end{pmatrix}$$ حيث $B \in M_{m,n}(K)$.

فأنه لكل مصفوفة ذي m سطر و n عمود يوجد تطبيق خطي وحيد لفضاء شعاعي ذو بعد n في فضاء شعاعي ذو بعد m ، وبهذا فأنه يوجد تطبيق h ، بحيث $h : M_{m,n}(K) \longrightarrow L(K^n, K^m)$:

$$\forall A \in M_{m,n}(K) \quad \exists f \in L(K^n, K^m) \quad , \quad h(A) = f$$

2.2.3 مثال

ليكن IR^2 ، IR^3 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل IR ، وليكن $f : IR^2 \to IR^3$ تطبيقاً معرفاً كالآتي :

$$\forall (x,y) \in IR^2 \quad , \quad f(x,y) = (x-y \; , 2x+y \; , \; x+3y)$$

واضح ان f تطبيق خطي من IR^2 في IR^3 .

لتكن $\{e_1=(1,0) \; , \; e_2=(0,1)\}$ اساساً نظامياً في IR^2 ، ولتكن $\{l_1=(1,0,0) ، l_2=(0,1,0) ، l_3=(0,0,1)\}$ اساساً نظامياً في IR^3 فأن :-

$$f(e_1)=f(1,0)=(1,2,1)=a_{11}l_1+a_{21}l_2+a_{31}l_3=a_{11}(1,0,0)+a_{21}(0,1,0)+a_{31}(0,0,1)$$

$$f(e_2)=f(0,1)=(-1,1,3)=a_{12}l_1+a_{22}l_2+a_{32}l_3=a_{12}(1,0,0)+a_{22}(0,1,0)+a_{32}(0,0,1)$$

فأن $a_{11}=1$ ، $a_{21}=2$ ، $a_{31}=1$ ، $a_{12}=-1$ ، $a_{22}=1$ ، $a_{32}=3$.

لذلك فإن المصفوفة A الموافقة للتطبيق الخطي f هي :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

وهي ذات عمودين (عدد أشعة أساس $\mathbb{R}^2$) وثلاثة أسطر (عدد أشعة أساس $\mathbb{R}^3$) ، أي أن $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$.

وبالعكس لنبدأ الآن بأي مصفوفة : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

ولنأخذ الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ وأساسه النظامي $\{e_1, e_2\}$ والفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ وأساسه النظامي $\{l_1, l_2, l_3\}$ (كلاهما على الحقل $\mathbb{R}$).

ولتكن y_1, y_2, y_3 أشعة ما من $\mathbb{R}^2$ فإنه حسب (1.3.2) يوجد تطبيق خطي وحيد $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ بحيث $f(l_i) = y_i$ ، $i = 1, 2, 3$ أي أن :

$$f(l_1) = y_1 = a_1 e_1 + a_2 e_2 = (a_1, a_2)$$
$$f(l_2) = y_2 = b_1 e_1 + b_2 e_2 = (b_1, b_2)$$
$$f(l_3) = y_3 = c_1 e_1 + c_2 e_2 = (c_1, c_2)$$

حيث $a_i ، b_i ، c_i \in \mathbb{R}$. فإنه لكل $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ،

$$f(x, y, z) = f(xl_1 + yl_2 + zl_3) = xf(l_1) + yf(l_2) + zf(l_3) =$$
$$= (a_1 x, a_2 x) + (b_1 y, b_2 y) + (c_1 z, c_2 z) = (a_1 x + b_1 y + c_1 z, a_2 x + b_2 y + c_2 z)$$

وهذه هي الصيغة العامة للتطبيق الخطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^2$.

فأن :

$$f(1,0,0) = (a_1, a_2) = a_{11} e_1 + a_{21} e_2 = 2(1,0) + 0(0,1) = (2,0)$$
$$f(0,1,0) = (b_1, b_2) = a_{12} e_1 + a_{22} e_2 = 1(1,0) + 1(0,1) = (1,1)$$
$$f(0,0,1) = (c_1, c_2) = a_{13} e_1 + a_{32} e_2 = -1(1,0) + 1(0,1) = (-1,1)$$

فأن $a_1 = 2$ ، $a_2 = 0$ ، $b_1 = 1$ ، $b_2 = 1$ ، $c_1 = -1$ ، $c_2 = 1$.

بهذا $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; f(x,y,z) = (2x+y-z , y+z)$

3.2.3 نظرية

(١) المصفوفة المرافقة للتطبيق الصفري هي المصفوفة الصفرية .

(٢) المصفوفة المرافقة للتطبيق الحيادي هي المصفوفة الحيادية .

البرهان :

(1) ليكن V_1 فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، ذا الاساس $\{v_1,\dots,v_n\}$ ، V_2 فضاءاً شعاعياً على الحقل K ذا الاساس $\{u_1,\dots,u_m\}$ ، وليكن $f_0 : V_1 \to V_2$ تطبيقاً معرفاً كالآتي:

$$\forall v \in V_1 \quad , \quad f_0(v) = 0$$

فأن :

$$f_0(v_1) = 0 = 0.u_1 + \dots + 0.u_m$$
$$f_0(v_2) = 0 = 0.u_1 + \dots + 0.u_m$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_0(v_n) = 0 = 0.u_1 + \dots + 0.u_m$$

فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f_0 هي :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$ وهي المصفوفة الصفرية.

(2) ليكن $V_1 = V_2$ وليكن $f: V_1 \to V_1$ تطبيقاً معرفاً كالآتي : $\forall v \in V_1 \quad , \quad f(v) = v$

فأن :

$$f(v_1) = v_1 = 1.v_1 + 0.v_2 + \dots + 0.v_n$$
$$f(v_2) = v_2 = 0.v_1 + 1.v_2 + \dots + 0.v_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f(v_n) = v_n = 0.v_1 + 0.v_2 + \dots + 1.v_n$$

فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f هي :

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$ وهي المصفوفة الحيادية.

(و. هـ. م.)

4.2.3 تعريف

نعرف مرتبة المصفوفة A بأنها رتبة التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A ، ونرمز لمرتبة A بالرمز rank(A) .

3.3 الفضاء الشعاعي للمصفوفات

1.3.3 تعريف

ليكن K حقلاً ، ولتكن $A, B \in M_{m,n}(K)$ ، $\{u_1, \dots, u_m\}$ اساساً للفضاء الشعاعي K^m ، $\{v_1, \dots, v_n\}$ اساساً للفضاء الشعاعي K^n . وليكن f تطبيقاً خطياً مرافقاً للمصفوفة A و g تطبيقاً خطياً مرافقاً للمصفوفة B . برهنا في (5.2) ان $f+g$ تطبيق خطي وهو عنصر من $L(K^n, K^m)$.

لتكن

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

حيث $a_{ij}, b_{ij} \in K$.

لكل $v_j \in \{v_1, \dots, v_n\}$ فأن :

$$(f+g)(v_j) = f(v_j) + g(v_j)$$

و

$$(f+g)(v_1) = f(v_1) + g(v_1) = (a_{11}u_1 + \dots + a_{m1}u_m) + (b_{11}u_1 + \dots + b_{m1}u_m)$$
$$= (a_{11}+b_{11})u_1 + \dots + (a_{m1}+b_{m1})u_m$$

$$(f+g)(v_2) = f(v_2) + g(v_2) = (a_{12}u_1 + \dots + a_{m2}u_m) + (b_{12}u_1 + \dots + b_{m2}u_m)$$
$$= (a_{12}+b_{12})u_1 + \dots + (a_{m2}+b_{m2})u_m$$

$$(f+g)(v_n) = f(v_n) + g(v_n) = (a_{1n}u_1 + \dots + a_{mn}u_m) + (b_{1n}u_1 + \dots + b_{mn}u_m)$$
$$= (a_{1n}+b_{1n})u_1 + \dots + (a_{mn}+b_{mn})u_m$$

فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي $f+g$ ولتكن C هي :

$$C = \begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) & \dots & (a_{1n}+b_{1n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}+b_{m1}) & (a_{m2}+b_{m2}) & \dots & (a_{mn}+b_{mn}) \end{pmatrix}$$

تسمى المصفوفة C حاصل جمع المصفوفتين A ، B

ونكتب $C = A + B$.

نلاحظ ان العمود الذي ترتيبه j في المصفوفة C يتكون بأيجاد مركبات $f(v_j)$ ، $g(v_j)$ في الاساس $\{u_1, \dots, u_m\}$ ومن ثم

جمعها ، فنضاف لذلك العنصر a_{ij} في المصفوفة A الى العنصر b_{ij} من المصفوفة B . من هنا نرى ان :

$$M(f+g) = C = A+B = M(f) + M(g)$$

2.3.3 تعريف

لتكن $A=(a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ ، وليكن f تطبيقاً خطياً مرافقاً للمصفوفة A ، اي ان f هو تطبيق خطي من K^n في K^m.

فاذا كان $\lambda \in K$ فأننا برهنا في (1.3.2) ان λf تطبيق خطي . لنحسب المصفوفة المرافقة للتطبيق λf .

لتكن $\{v_1, \ldots, v_n\}$ اساساً في K^n ، $\{u_1, \ldots, u_m\}$ اساساً في K^m ، فأن :

$$(\lambda f)(v_1) = \lambda(f(v_1)) = \lambda(a_{11}u_1 + \cdots + a_{m1}u_m) =$$
$$= \lambda a_{11}u_1 + \cdots + \lambda a_{m1}u_m$$
$$(\lambda f)(v_2) = \lambda(f(v_2)) = \lambda(a_{12}u_1 + \cdots + a_{m2}u_m)$$
$$= \lambda a_{12}u_1 + \cdots + \lambda a_{m2}u_m$$

- -

$$(\lambda f)(v_n) = \lambda(f(v_n)) = \lambda(a_{1n}u_1 + \cdots + a_{mn}u_m)$$
$$= \lambda a_{1n}u_1 + \cdots + \lambda a_{mn}u_m$$

فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي λf ولتكن B هي :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} = (\lambda a_{ij})$$

وتسمى المصفوفة B ، مصفوفة حاصل ضرب المصفوفة A بالمقدار السلمي λ ونكتب $B = \lambda A$.

3.3.3 تعريف

ليكن K حقلاً ، المجموعة $M_{m,n}(K)$ هي مجموعة مغلقة وتجميعية وتبديلية بالنسبة لعملية جمع المصفوفات ، حيث المصفوفة الصفرية عنصرها الحيادي ، ولكل مصفوفة $A \in M_{m,n}(K)$ فإن المصفوفة $-A \in M_{m,n}(K)$ هي نظير A بالنسبة للجمع. فأن المجموعة $M_{m,n}(K)$ وعملية جمع المصفوفات هي زمرة ابلية.
مباشرة من (2.3.3) نستنتج ان ضرب المصفوفة بمقدار سلمي يحقق الخواص التالية :-

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K \ , \ \forall \ A_1, A_2 \in M_{m,n}(K) \ ;$

(1) $\lambda_1 (A_1 + A_2) = \lambda_1 A_1 + \lambda_1 A_2$

(2) $(\lambda_1 + \lambda_2) A_1 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_1$

(3) $\lambda_1 (\lambda_2 A_1) = (\lambda_1 \lambda_2) A_1$

(4) $1 . A_1 = A_1$

فأن المجموعة $M_{m,n}(K)$ هي فضاء شعاعي على الحقل K يسمى بالفضاء الشعاعي للمصفوفات .

4.3 جداء المصفوفات

1.4.3 تعريف

ليكن V_1 ، V_2 ، V_3 ثلاث فضاءات شعاعية على نفس الحقل K ، ولتكن $\{k_1, \ldots, k_m\}$ أساساً في V_1، $\{l_1, \ldots, l_n\}$ أساساً في V_2 ، و $\{h_1, \ldots, h_r\}$ أساساً في V_3 ، وليكن f تطبيقاً خطياً من V_1 في V_2 ، $A=(\alpha_{ij})$ المصفوفة المرافقة للتطبيق f ، وليكن g تطبيقاً خطياً من V_2 في V_3 ، $B=(\gamma_{ij})$ هي المصفوفة المرافقة للتطبيق g . برهننا في (3.1.2) أن تركيب تطبيقين خطيين هو تطبيق خطي ، لذلك $\varphi = g \circ f$ هو تطبيق خطي من V_1 في V_3 . لنجد المصفوفة C المرافقة للتطبيق φ .

نلاحظ أن :

$$B=(\gamma_{ij})=\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{r1} & \gamma_{r2} & \cdots & \gamma_{rn} \end{pmatrix} ، \quad A=(\alpha_{ij})=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

لكي نحصل على أعمدة C نوجد مركبات الأشعة $\{k_1, \ldots, k_m\}$ وفق التطبيق الخطي $\varphi = g \circ f$ في الأساس $\{h_1, \ldots, h_r\}$ فإن :

$$\varphi(k_1) = (g\circ f)(k_1) = g(f(k_1)) = g(\alpha_{11} l_1 + \alpha_{21} l_2 + \cdots + \alpha_{n1} l_n)$$

$$= \alpha_{11}\, g(l_1) + \alpha_{21} g(l_2) + \cdots + \alpha_{n1}\, g(l_n)$$

$$= \alpha_{11}(\gamma_{11} h_1 + \gamma_{21} h_2 + \cdots + \gamma_{r1} h_r) + \alpha_{21}(\gamma_{12} h_1 + \gamma_{22} h_2 + \cdots + \gamma_{r2} h_r) +$$

$$+ \cdots + \alpha_{n1}(\gamma_{1n} h_1 + \gamma_{2n} h_2 + \cdots + \gamma_{rn} h_r)$$

$$= (\alpha_{11}\gamma_{11} + \alpha_{21}\gamma_{12} + \cdots + \alpha_{n1}\gamma_{1n})h_1 + \cdots + (\alpha_{11}\gamma_{r1} + \alpha_{21}\gamma_{r2} + \cdots + \alpha_{n1}\gamma_{rn})h_r$$

- -

$$\varphi(k_m) = (g\circ f)(k_m) = g(f(k_m)) = g(\alpha_{1m}l_1 + \alpha_{2m}l_2 + \cdots + \alpha_{nm}l_n)$$

$$= \alpha_{1m}g(l_1) + \alpha_{2m}g(l_2) + \cdots + \alpha_{nm}g(l_n)$$

$$= \alpha_{1m}(\gamma_{11}h_1 + \cdots + \gamma_{r1}h_r) + \alpha_{2m}(\gamma_{12}h_1 + \cdots + \gamma_{r2}h_r) + \cdots + \alpha_{nm}(\gamma_{1n}h_1 + \cdots + \gamma_{rn}h_r)$$

$$= (\gamma_{11}\alpha_{1m} + \cdots + \gamma_{1n}\alpha_{nm})h_1 + \cdots + (\gamma_{r1}\alpha_{1m} + \cdots + \gamma_{rn}\alpha_{nm})h_r$$

فأن المصفوفة C المرافقة للتطبيق الخطي φ هي :

$$C = \begin{pmatrix} (\gamma_{11}\alpha_{11} + \cdots + \gamma_{1n}\alpha_{n1}) & \cdots & (\gamma_{11}\alpha_{1m} + \cdots + \gamma_{1n}\alpha_{nm}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\gamma_{r1}\alpha_{11} + \cdots + \gamma_{rn}\alpha_{n1}) & \cdots & (\gamma_{r1}\alpha_{1m} + \cdots + \gamma_{rn}\alpha_{nm}) \end{pmatrix}$$

نسمي المصفوفة C ، بمصفوفة حاصل ضرب المصفوفة B في المصفوفة A ونكتب $BA = C$.

اي ان :

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{r1} & \cdots & \gamma_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11}\alpha_{11} + \cdots + \gamma_{1n}\alpha_{n1} & \cdots & \gamma_{11}\alpha_{1m} + \cdots + \gamma_{1n}\alpha_{nm} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{r1}\alpha_{11} + \cdots + \gamma_{rn}\alpha_{n1} & \cdots & \gamma_{r1}\alpha_{1m} + \cdots + \gamma_{rn}\alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

لنلاحظ هنا ان : $M(g).M(f) = BA = C = M(g\circ f)$.

ونلاحظ انه حتى نتمكن من ان نجد حاصل ضرب المصفوفة B في المصفوفة A يجب ان يكون عدد الاعمدة من المصفوفة B مساوياً لعدد الأسطر في المصفوفة A ، وهذا ناتج

من أن f هو تطبيق من V_1 في V_2 و g هو تطبيق من V_2 في V_3 .

2.4.3 ملاحظة

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K ، ولتكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ اساساً في V_1 ، $\{u_1, \dots, u_m\}$ اساساً في V_2 ، وليكن f تطبيقاً خطياً من V_1 في V_2 ، $A = (a_{ij})$ المصفوفة المرافقة للتطبيق f .

لكل $x \in V_1$ فأن $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ حيث $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$

فأن المصفوفة التي تمثل مركبات الشعاع x في الاساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ تكون مصفوفة ذات عمود واحد و n سطراً ونكتب :

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

وحيث ان $f(x) \in V_2$ فأن : $y = f(x) = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m$ ، المصفوفة التي تمثل مركبات $f(x)$ في الاساس $\{u_1, \dots, u_m\}$ هي :

$$Y = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

من هنا فأن :
$$y = f(x) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) =$$
$$= \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = \lambda_1 (a_{11} u_1 + \dots + a_{m1} u_m) + \dots + \lambda_n (a_{1n} u_1 + \dots + a_{mn} u_m)$$
$$= (a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1n}\lambda_n) u_1 + \dots + (a_{m1}\lambda_1 + \dots + a_{mn}\lambda_n) u_m$$

بما ان $\{u_1, \dots, u_m\}$ هو اساس في V_2 ، فانه حسب (3 . 5 . 1) كل شعاع يكتب بشكل وحيد بشكل مزج خطي لأشعة الأساس فان :

$$\alpha_1 = a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1n}\lambda_n$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\alpha_m = a_{m1}\lambda_1 + \dots + a_{mn}\lambda_n$$

فأن :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

اي ان $Y = AX$

5 . 3 المصفوفة المربعة

في (2 . 1 . 3) قلنا ان المصفوفة التي يتساوى عدد اعمدتها وعدد اسطرها تسمى مصفوفة مربعة .

نلاحظ ان المصفوفة المربعة هي مصفوفة مرافقة لتطبيق خطي من فضاء في فضاء أخر ذي بعدين متساويين .

نرمز لمجموعة المصفوفات المربعة من الدرجة n ذي العناصر من الحقل K بالرمز $M_n(K)$.

1 . 5 . 3 تعريف

ليكن K حقلاً ، لأي $A, B, C \in M_n(K)$ ، واذا كان f_1 هو التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A ، f_2 هو التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة B ، f_3 هو التطبيق الخطي

الموافقة للمصفوفة C ، فأنه :

$$A.(B.C) = (M(f_1))(M(f_2).M(f_3)) = (M(f_1))(M(f_2 \circ f_3)) =$$
$$= M(f_1 \circ (f_2 \circ f_3)) = M((f_1 \circ f_2) \circ f_3) = (M(f_1).M(f_2)).(M(f_3))$$
$$= (A.B).C$$

وأن :

$$C(A+B) = M(f_3)(M(f_1) + M(f_2)) = M(f_3)(M(f_1+f_2)) =$$
$$= M(f_3 \circ (f_1+f_2)) = M((f_3 \circ f_1) + (f_3 \circ f_2)) =$$
$$= M(f_3 \circ f_1) + M(f_3 \circ f_2) = C.A + C.B$$

بنفس الطريقة نبرهن أن : $(A+B).C = A.C + B.C$

استناداً الى ما سبق نستنتج ان $M_n(K)$ هي حلقة بالنسبة لعمليتي جمع وضرب المصفوفات . بصورة عامة جداء المصفوفات ليست تبديلية لأن تركيب التطبيقات الخطية ليست تبديلية .

2.5.3 تعريف

ليكن K حقلاً ، $A \in M_n(K)$ ، فأذا وجدت مصفوفة $B \in M_n(K)$ بحيث $A.B = B.A = I_n$ عندئذ نقول ان المصفوفة A عكوس في الحلقة $M_n(K)$ ، وتسمى المصفوفة B نظير A ونرمز له بالرمز A^{-1} .

3.5.3 نظرية

ليكن K حقلاً ، ولتكن $A, B \in M_n(K)$ ، فأذا كان A ، B عكوسين فأن المصفوفة AB عكوس .

البرهان :

بما أن : $(B^{-1}A^{-1})(AB) = (B^{-1}(A^{-1}A))B = B^{-1}B = I_n$

وكذلك :

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n$

فأن AB عكوس ونظيرها هو $B^{-1}A^{-1}$.

(و.هـ.م.)

4.5.3 نتيجة

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

البرهان :

$$\begin{aligned}(AB)^{-1} &= (AB)^{-1}I_n \\ &= (AB)^{-1}\left((AB)(B^{-1}A^{-1})\right) = \left((AB)^{-1}(AB)\right)(B^{-1}A^{-1}) \\ &= I_n B^{-1}A^{-1} \\ &= B^{-1}A^{-1}\end{aligned}$$

(و.هـ.م.)

5.5.3 نظرية

ليكن K حقلاً ، ولتكن $A \in M_n(K)$ ، وليكن f تطبيقاً خطياً مرافقاً للمصفوفة A فأن الشروط التالية متكافئة :

(١) A عكوس

(٢) f تقابل

(3) اشعة اعمدة المصفوفة A مستقلة خطياً .

(4) $rank(A) = n$.

البرهان :

سنبرهن على تكافؤ كل من هذه الشروط مع الشرط (1) ، وبذلك نحصل على تكافؤ جميع الشروط .

ليكن f تطبيقاً خطياً من K^n في K^n ، ولتكن $\{e_1, \ldots, e_n\}$ اساساً نظامياً في K^n .

نبرهن (1) $\leftrightarrow$ (2)

نفرض ان A عكوس ، ولتكن B نظير A ، اي ان $BA = AB = I_n$. وليكن h تطبيقاً خطياً مرافقاً للمصفوفة B ، فأنه حسب (1.4.3) يكون $h \circ f = f \circ h = Id_{K^n}$ فأنه حسب (7.3.2) يكون f تقابل .

نفرض الآن ان f تقابل ، فأذا كانت المصفوفة C هي المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f^{-1} ، فأننا نجد أن : $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_{K^n}$ ، فأنه حسب (1.4.3) نستنتج ان $A \cdot C = C \cdot A = I_n$ ، بذلك A عكوس .

نبرهن (1) $\leftrightarrow$ (3)

حسب (2.3.2) f تقابل $\Leftrightarrow$ صورة اساس في K^n هي اساس في K^n . اي ان f تقابل $\Leftrightarrow \{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ أساس في K^n . اي ان f تقابل $\Leftrightarrow f(e_1), \ldots, f(e_n)$ مستقلة خطياً .

وبذلك فأن A عكوس $\Leftrightarrow$ f تقابل $\Leftrightarrow$ $f(e_1), \dots, f(e_n)$ مستقلة خطياً ، أي ان : A عكوس $\Leftrightarrow$ اشعة اعمدة A مستقلة خطياً.

نبرهن (1) $\longleftrightarrow$ (4)

. A عكوس $\Leftrightarrow$ f تقابل $\Leftrightarrow$ $rank(f) = n = rank(A)$

(و. هـ. م.)

نلاحظ من هنا ان رتبة المصفوفة A هو العدد الاعظمي للأشعة المستقلة خطياً والتي يمكن الحصول عليها من اشعة اعمدة المصفوفة A .

6.3 منقول وأثر المصفوفة

ليكن K حقلاً ، ولتكن $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ ، منقول المصفوفة A هي المصفوفة $B = (b_{ji})$ حيث $B \in M_{n,m}(K)$ و $a_{ij} = b_{ji}$. اي اننا نجعل اعمدة A اسطراً في B ، وأسطر A اعمدة في B . ونرمز لمنقول المصفوفة A بالرمز A^T .

اذا كانت $A = A^T$ عندئذ نقول ان المصفوفة A هي مصفوفة متناظرة ، ونلاحظ ان $(A^T)^T = A$.

لكل $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ نعرف اثر المصفوفة A بأنه مجموع عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة A ، ونرمز له بالرمز $Tr(A)$ وبذلك فأن :

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

من هنا فأنه يمكن البرهان بسهولة على ان :(تمرين (7)) .

$\forall A, B \in M_{m,n}(K) \quad , \quad (A+B)^T = A^T + B^T$ (1)

$\forall A \in M_{m,n}(K) \quad , \quad \forall B \in M_{n,p}(K) \; , (AB)^T = B^T \cdot A^T$ (2)

$\forall \lambda \in K \quad , \quad \forall A \in M_{m,n}(K) \quad , (\lambda A)^T = \lambda A^T$ (3)

$\forall A, B \in M_n(K) \quad , \quad Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$ (4)

$\forall \lambda \in K \; , \; \forall A \in M_n(K) \quad , Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$ (5)

7.3 مصفوفة العبور

3.7.1 تعريف

ليكن V فضاء شعاعيا على الحقل K ، ولتكن $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ، $\{u_1, \ldots, u_n\}$ اساسان في V ، فأنه لكل $i = 1, \ldots, n$ ، u_i هو مزج خطي للأشعة $\{v_1, \ldots, v_n\}$

اي ان :

$$u_1 = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \cdots + a_{n1} v_n$$

$$u_2 = a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + \cdots + a_{n2} v_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n = a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \cdots + a_{nn} v_n$$

نسمي المصفوفة

$$P = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

مصفوفة العبور من الاساس $\{v_1, \ldots, v_n\}$ الى الاساس $\{u_1, \ldots, u_n\}$

2.7.3 أمثلة

(1) لتكن $A = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ ، $B = \{l_1 = (1,2), l_2 = (2,3)\}$
اساسان في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ على الحقل $\mathbb{R}$ فأن :

$$l_1 = a_{11} e_1 + a_{21} e_2$$
$$l_2 = a_{12} e_1 + a_{22} e_2$$

اي ان :

$$(1,2) = a_{11}(1,0) + a_{21}(0,1) = (a_{11}, a_{21})$$
$$(2,3) = a_{12}(1,0) + a_{22}(0,1) = (a_{12}, a_{22})$$

فأن : $a_{11} = 1$ ، $a_{21} = 2$ ، $a_{12} = 2$ ، $a_{22} = 3$.

فأن مصفوفة العبور P من الاساس A الى الاساس B
هي :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

(2) لتكن الآن $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ مصفوفة العبور من
الاساس النظامي في $\mathbb{R}^2$ الى الاساس $\{l_1, l_2\}$. اوجد l_1, l_2 .

$$l_1 = a_{11} e_1 + a_{21} e_2 = 1(1,0) + (-1)(0,1) = (1,-1)$$
$$l_2 = a_{12} e_1 + a_{22} e_2 = 4(1,0) + 2(0,1) = (4,2)$$

ومنه $\{l_1 = (1,-1) , l_2 = (4,2)\}$.

3.7.3 ملاحظات

(1) من (3.7.1) نلاحظ انه لو اخذنا التطبيق الحيادي Id_V من V على V ، وأذا اعتبرنا $\{u_1,\ldots,u_n\}$ اساساً في مجموعة الانطلاق ، $\{v_1,\ldots,v_n\}$ اساساً في مجموعة الاستقرار ونرمز لذلك عندئذ كما يلي : $Id_V : V_{\{u_1,\ldots,u_n\}} \longrightarrow V_{\{v_1,\ldots,v_n\}}$

فأن : $Id_V(u_1) = u_1 \;,\; Id_V(u_2) = u_2 \;,\; \ldots \;,\; Id_V(u_n) = u_n$

اي ان :

$$Id_V(u_1) = u_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n$$
$$Id_V(u_2) = u_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{n2}v_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Id_V(u_n) = u_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n$$

فأن :

$$P = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة مرافقة للتطبيق الخطي Id_V ، وهي في نفس الوقت مصفوفة العبور من الاساس $\{v_1,\ldots,v_n\}$ الى الاساس $\{u_1,\ldots,u_n\}$.
اي ان مصفوفة العبور هي المصفوفة المرافقة للتطبيق الحيادي.
بما ان Id_V تطبيق تقابل ، فأن P عكوس ، P^{-1} هي المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي Id_V^{-1} وبذلك P^{-1} هي مصفوفة العبور من الاساس $\{u_1,\ldots,u_n\}$ الى الاساس $\{v_1,\ldots,v_n\}$.

(2) من (1.7.3) لكل $x \in V$ فأن :

$$x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n$$

وكذلك

$$x = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \cdots + y_n v_n$$

بالأعتماد على (1) فأن :

$$y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n = x = Id_V(x) = Id_V(x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n) =$$
$$= x_1 Id_V(u_1) + x_2 Id_V(u_2) + \cdots + x_n Id_V(u_n) =$$
$$= x_1(a_{11} v_1 + \cdots + a_{n1} v_n) + x_2(a_{12} v_1 + \cdots + a_{n2} v_n) + \cdots + x_n(a_{1n} v_1 + \cdots + a_{nn} v_n)$$

واذن :

$$y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n = (x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \cdots + x_n a_{1n}) v_1 + \cdots + (x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \cdots x_n a_{nn}) v_n$$

فأن :

$$y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n$$
$$y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n$$

اي ان :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

فأن :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

حيث $y_1, \dots, y_n$ هي مركبات الشعاع x في الأساس $\{v_1, \dots, v_n\}$
، $x_1, \dots, x_n$ هي مركبات الشعاع x في الأساس $\{u_1, \dots, u_n\}$
، P هي مصفوفة العبور من الأساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ الى الأساس $\{u_1, \dots, u_n\}$.

(3) من (3 . 7 . 1) فأن :

$$u_1 = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \dots + a_{n1} v_n$$
$$u_2 = a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + \dots + a_{n2} v_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u_n = a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \dots + a_{nn} v_n$$

و

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ هي مصفوفة العبور

من الأساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ الى الأساس $\{u_1, \dots, u_n\}$.

لكن من (1) فأن :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

اي ان :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

(4) ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K،
وليكن f تطبيقاً خطياً من V_1 في V_2 ، ولتكن $\{v_1,\dots,v_n\}$
$\{v'_1,\dots,v'_n\}$، اساسان في V_1 ، $\{u_1,\dots,u_m\}$ ، $\{u'_1,\dots,u'_m\}$
اساسان في V_2 فأن :

$$v'_1 = b_{11} v_1 + b_{21} v_2 + \dots + b_{n1} v_n$$
$$v'_2 = b_{12} v_1 + b_{22} v_2 + \dots + b_{n2} v_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$v'_n = b_{1n} v_1 + b_{2n} v_2 + \dots + b_{nn} v_n$$

فأن مصفوفة العبور P من الاساس $\{v_1,\dots,v_n\}$ الى الاساس
$\{v'_1,\dots,v'_n\}$ هي :

$$P = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

وكذلك عندنا

$$f(v_1) = a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + \dots + a_{m1} u_m$$
$$f(v_2) = a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + \dots + a_{m2} u_m$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f(v_n) = a_{1n} u_1 + a_{2n} u_2 + \dots + a_{mn} u_m$$

فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f هي :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

فيكون لدينا :

$$\underset{\{v'_1,\dots,v'_n\}}{V_1} \xrightarrow{Id_{V_1}} \underset{\{v_1,\dots,v_n\}}{V_1} \xrightarrow{f} \underset{\{u_1,\dots,u_m\}}{V_2}$$

حيث $M(f)=A$ ، $M(Id_{V_1})=P$ فأن :

$$M(f\circ Id_{V_1}) = M(f)\cdot M(Id_{V_1}) = AP$$

وفي V_2 نلاحظ ان :

$$u'_1 = c_{11}u_1 + c_{21}u_2 + \dots + c_{m1}u_m$$
$$u'_2 = c_{12}u_1 + c_{22}u_2 + \dots + c_{m2}u_m$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u'_m = c_{1m}u_1 + c_{2m}u_2 + \dots + c_{mm}u_m$$

فأن مصفوفة العبور من الاساس $\{u_1,\dots,u_m\}$ الى الاساس $\{u'_1,\dots,u'_m\}$ هي :

$$Q = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{pmatrix}$$

لكن Q هي المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي Id_{V_2} .
فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي $(Id_{V_2})^{-1}$ هي Q^{-1} ،
وهي مصفوفة العبور من الاساس $\{u'_1,\dots,u'_m\}$ الى الاساس $\{u_1,\dots,u_m\}$ ، وبذلك يكون لدينا :

$$\underset{\{v'_1,\dots,v'_n\}}{V_1} \xrightarrow{Id_{V_1}} \underset{\{v_1,\dots,v_n\}}{V_1} \xrightarrow{f} \underset{\{u_1,\dots,u_m\}}{V_2} \xrightarrow{Id^{-1}_{V_2}} \underset{\{u'_1,\dots,u'_m\}}{V_2}$$

حيث $M(Id^{-1}_{V_2}) = Q^{-1}$ ، فأن :

$$M(Id^{-1}_{V_2}\circ f\circ Id_{V_1}) = M(Id^{-1}_{V_2})\cdot M(f)\cdot M(Id_{V_1}) = Q^{-1}AP$$

فأن المصفوفة $B=Q^{-1}AP$ هي المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f بالنسبة للأساس $\{v'_1,\dots,v'_n\}$ في V_1 والأساس $\{u'_1,\dots,u'_m\}$ في V_2 .

وهذه العلاقة نستخدمها عند تغير الاساس لأيجاد المصفوفة المرافقة لتطبيق خطي .

(5) ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، وليكن $f:V\to V$ تطبيقاً خطياً ، ولتكن $\{v_1,\dots,v_n\}$ ، $\{v'_1,\dots,v'_n\}$ اساسان في V . ولتكن A المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f بالنسبة للأساس $\{v_1,\dots,v_n\}$ ، B المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f بالنسبة للأساس $\{v'_1,\dots,v'_n\}$ ، P مصفوفة العبور من الأساس $\{v_1,\dots,v_n\}$ الى الأساس $\{v'_1,\dots,v'_n\}$ ، فأنه من (3) نستنتج ان $B=P^{-1}AP$.

8.3 المحددات

1.8.3 تعريف

ليكن K حقلاً ، ولتكن $A=(a_{ij})\in M_n(K)$ ، لكل عددين طبيعيين $1\le i,j\le n$ ، نعرف المصفوفة A_{ij} بأنها المصفوفة الناتجة من المصفوفة A وذلك بحذف السطر i والعمود j من المصفوفة A .

2.8.3 تعريف

ليكن K حقلاً ، $f : M_n(K) \to K$ تطبيقاً يحقق الشرطين :-

(1) إذا كانت $A = (a)$ ، $a \in K$ فأن $f(A) = a$

(2) إذا كانت
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
حيث $n > 1$ فأن:

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \; a_{ij} \; f(A_{ij})$$

لأي عدد طبيعي $1 \leq j \leq n$

نسمي التطبيق f محدد المصفوفة A ونرمز لها بالرمز $\det(A)$.

نلاحظ هنا أن :

$$f(A) = \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \; a_{ij} \; f(A_{ij})$$

عند تثبيت j لأحد القيم من $1, \ldots, n$.

3.8.3 أمثلة

(1) إذا كانت $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ مصفوفة في $M_2(K)$ حيث K حقل . لنفرض أن $j = 2$ فأن :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+2} \; a_{i2} \; \det(A_{i2})$$
$$= (-1)^{1+2} a_{12} \det(A_{12}) + (-1)^{2+2} a_{22} \det(A_{22})$$
$$= (-1) a_{12} a_{21} + a_{22} a_{11} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

(ج) لتكن

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ مصفوفة في $M_3(K)$

وليكن $j = 1$ فإن :

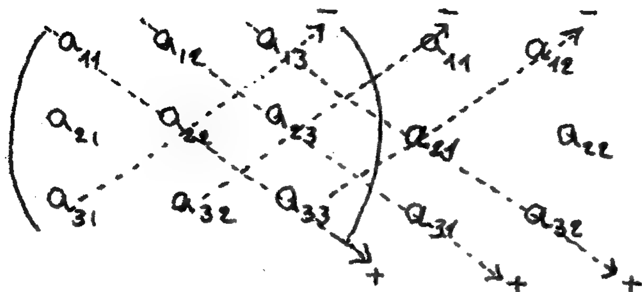
$$\det(A) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1})$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{2+1} a_{21} \det(A_{21}) + (-1)^{3+1} a_{31} \det(A_{31})$$

$$= a_{11} \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + (-a_{21}) \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

وهناك طريقة خاصة مختصرة لإيجاد محدد المصفوفة من الدرجة 3 وهي :



نوجد محدد A بإيجاد حاصل ضرب العناصر الموجودة على كل سهم مع اعطاء الإشارة الموجودة في نهاية السهم لناتج الضرب ، ثم جمع هذه العناصر .

فإن :

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

4.8.3 نظرية

لتكن
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$
مصفوفة في $M_n(K)$

فأن :

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{(n-1)(n-1)}a_{nn}$$

البرهان :

نبرهن على النظرية بالتراجع بالنسبة للعدد الطبيعي n .

إذا كان $n=1$ فأن $A=(a_{11})$ ومن التعريف فأن : $\det(A)=a_{11}$.

لنفرض ان النظرية صحيحة من اجل مصفوفة من الدرجة $n-1$

لتكن الآن A مصفوفة من الدرجة n ، من تعريف محدد المصفوفة

فأن :

$$\det(A) = (-1)^{n+n} a_{nn} \det(A_{nn}) = a_{nn}\det(A_{nn})$$

لكن من الفرضية بما أن A_{nn} هي مصفوفة من الدرجة $n-1$

فأن :

$$\det(A_{nn}) = a_{11}a_{22}\cdots a_{(n-1)(n-1)}$$

وبذلك فأن :

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{(n-1)(n-1)}a_{nn}$$

(و.هـ.م.)

5.8.3 نتيجة

(1) إذا كانت

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ مصفوفة قطرية

من $M_n(K)$ فإن:

$$\det(A) = a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}$$

(2) إذا كانت $A = I_n$ فإن:

$$\det(A) = 1$$

6.8.3 تعريف

لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة مربعة من الدرجة n،
$B = (b_{ij})$ مصفوفة مربعة من الدرجة m، $C = (c_{ij})$
مصفوفة من الدرجة $n \times m$، $D = (d_{ij})$ مصفوفة
من الدرجة $m \times n$، حيث a_{ij}، b_{ij}، c_{ij}، $d_{ij} \in K$.
نعرف المصفوفة E من الدرجة $n+m$ كما يلي: $E = (e_{rs})$:
حيث:

$$e_{rs} = \begin{cases} a_{ij} & \text{إذا كان } r \leq n \text{، } s \leq n \\ c_{ij} & \text{إذا كان } r \leq n \text{، } s > n \\ d_{ij} & \text{إذا كان } r > n \text{، } s \leq n \\ b_{ij} & \text{إذا كان } r > n \text{، } s > n \end{cases}$$ حيث $r, s = 1, \ldots, n+m$

نسمي المصفوفة

$$E = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} & c_{11} \cdots c_{1m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} & c_{n1} \cdots c_{nm} \\ d_{11} \cdots d_{1n} & b_{11} \cdots b_{1m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ d_{m1} \cdots d_{mn} & b_{m1} \cdots b_{mm} \end{pmatrix}$$ مصفوفة القوالب

ونرمز لها بالرمز :

$$E = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$$

7.8.3 نظرية

لتكن $E = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$ مصفوفة كما في (6.8.3).

فإذا كانت C هي مصفوفة صفرية ، فأن :

$$\det(E) = \det(A) \cdot \det(B)$$

البرهان :

نبرهن على النظرية بالتراجع بالنسبة للعدد الطبيعي m .

C مصفوفة صفرية معناه $c_{ij} = 0$ لكل $i=1,\dots,n$ ، $j=1,\dots,m$

نرمز عندها للمصفوفة C بالرمز Θ ، وليكن n اي عدد طبيعي و $m=1$ فأن :

$$\det(E) = \det\begin{pmatrix} A & \Theta \\ D & B \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & b_{11} \end{pmatrix} = b_{11} \det(A)$$

$$= \det(A) . \det(B)$$

لنفرض ان النظرية صحيحة من اجل عدد طبيعي $m-1$. فأن :

$$\det\begin{pmatrix} A & \Theta \\ D & B \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{(n+m)+(n+i)} b_{im} \det\begin{pmatrix} A & \Theta \\ D_i & B_{im} \end{pmatrix}$$

حيث B_{im} هي مصفوفة من الدرجة $(m-1)$ ، وبذلك فأن

D_i هي مصفوفة ناتجة من المصفوفة D بحذف السطر i

اي ان D_i هي مصفوفة من الدرجة $(m-1)\times n$.

اي ان المصفوفة $\begin{pmatrix} A & \Theta \\ D_i & B_{im} \end{pmatrix}$ هي مصفوفة من الدرجة $n+(m-1)$

فأنه من الفرضية ينتج ان :

$$\det\begin{pmatrix} A & \Theta \\ D_i & B_{im} \end{pmatrix} = \det(A)\cdot\det(B_{im})$$

من هنا فأن :

$$\det\begin{pmatrix} A & \Theta \\ D & B \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{n+m+n+i}\, b_{im}\det(A)\cdot\det(B_{im})$$

$$= (-1)^{2n}\det(A)\cdot\sum_{i=1}^{m}(-1)^{m+i}\, b_{im}\det(B_{im})$$
$$= \det(A)\cdot\det(B)$$

(و . هـ . م .)

بنفس الطريقة نبرهن على :

8.8.3 نتيجة

لتكن A مصفوفة من الدرجة $(m\times n)$ و B مصفوفة من الدرجة $(n\times m)$ و C مصفوفة مربعة من الدرجة m و D مصفوفة مربعة من الدرجة n، $E=\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$ و (جميع المصفوفات ذي العناصر من الحقل K)

فأذا كانت $B=\Theta$ فأن :

$$\det(E) = (-1)^{n\cdot m}\det(C)\cdot\det(D)$$

9.8.3 نظرية

ليكن K حقلاً ، ولتكن $A\in M_n(K)$ مصفوفة ، فأن

$$\det(A) = \det(A^T)$$

البرهان :

نبرهن على النظرية بالتراجع بالنسبة للعدد الطبيعي n .

إذا كان $n=1$ فإن $A=(a_{11})$ وبذلك فإن : $\det(A)=\det(A^T)$.

لنفرض ان النظرية صحيحة من اجل $n-1$ ، لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة مربعة من الدرجة n ، ولتكن $A_{i,n;j,n}$ مصفوفة ناتجة من المصفوفة A وذلك لحذف السطرين i ، n والعمودين j ، n ، فإن عندئذ :

$$\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+n}a_{in}\det(A_{in})=\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+n}a_{in}\det(A_{in}^T)$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+n}a_{in}\left(\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j+n-1}a_{nj}\det(A_{i,n;j,n}^T)\right)$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n-1}(-1)^{i+j+2n-1}a_{in}a_{nj}\det(A_{i,n;j,n})$$

وكذلك :

$$\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j+n}a_{nj}\det((A^T)_{jn})=\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j+n}a_{nj}\det(A_{nj})$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j+n}a_{nj}\left(\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+n-1}a_{in}\det(A_{i,n;j,n})\right)$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n-1}(-1)^{i+j+2n-1}a_{in}a_{nj}\det(A_{i,n;j,n})$$

من هنا، فإن :

$$\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+n}a_{in}\det(A_{in})=\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j+n}a_{nj}\det((A^T)_{jn})$$

من هنا، نستنتج ان :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in})$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in}) + a_{nn} \det(A_{nn})$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+n} a_{nj} \det(A^T)_{jn} + a_{nn} \det(A^T)_{nn}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+n} a_{nj} \det(A^T)_{jn} = \det(A^T)$$

(و. هـ. م.)

3.9 المحددات والأشكال الخطية

3.9.1 تعريف

(1) ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K، وليكن f شكلاً مزدوج الخطية ومتناوب على V. ولتكن $\{v_1, v_2\}$ اساساً في V. لكل $x_1, x_2 \in V$ فأن :

$$x_1 = a_{11} v_1 + a_{21} v_2$$
$$x_2 = a_{12} v_1 + a_{22} v_2$$

حيث $a_{ij} \in K$.

ولتكن $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ مصفوفة مركبات الأشعة x_1، x_2 في الاساس $\{v_1, v_2\}$ فأن :

$$f(x_1, x_2) = f(a_{11} v_1 + a_{21} v_2 , a_{12} v_1 + a_{22} v_2).$$

لكن f شكل مزدوج الخطية ومتناوب، فأن :

$$f(x_1, x_2) = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\, f(v_1, v_2)$$

فأننا نسمي المقدار $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$ محدد مصفوفة مركبات الشعاعين x_1 ، x_2 في الأساس $\{v_1, v_2\}$ ، ونرمز له بالرمز $\det_{\{v_1, v_2\}}(x_1, x_2)$.

(٢) واذا كان V فضاءاً شعاعياً ذا بعد 3 على الحقل K ، $\{v_1, v_2, v_3\}$ اساساً في V ، f تطبيقاً ثلاثي الخطية ومتناوب على V ، فأنه لكل $x_1, x_2, x_3 \in V$:

$$x_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3$$

$$x_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3$$

$$x_3 = a_{13}v_1 + a_{23}v_2 + a_{33}v_3$$

حيث $a_{ij} \in K$ ، ولتكن :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

مصفوفة مركبات الأشعة x_1 ، x_2 ، x_3 في الأساس $\{v_1, v_2, v_3\}$.

بما ان f شكل ثلاثي الخطية ومتناوب ، فأن :

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 , a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3 , a_{13}v_1 + a_{23}v_2 + a_{33}v_3)$$

$$= [a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{32}a_{13})] \cdot f(v_1, v_2, v_3)$$

فأن :

$$f(x_1, x_2, x_3) = \det(A) \cdot f(v_1, v_2, v_3)$$

نسمي $det(A)$ محدد مصفوفة مركبات الأشعة x_1 ، x_2 ، x_3 في الأساس $\{v_1, v_2, v_3\}$ ونرمز له بالرمز $(x_1, x_2, x_3) \det_{\{v_1, v_2, v_3\}}$

(3) إذا كان V فضاءاً شعاعياً ذا بعد n على الحقل K، f شكلاً متعدد الخطية ومتناوباً من الدرجة n على V ، و $\{v_1, \dots, v_n\}$ أساساً في V ، فإنه لكل $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ فإن :

$$x_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n$$
$$x_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n$$
- -
$$x_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{nn}v_n$$

حيث $a_{ij} \in K$ لكل $i, j = 1, \dots, n$.

فإن :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = det(A) . f(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

حيث

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

. نسمي $det(A)$ محدد مصفوفة مركبات الأشعة $x_1, \dots, x_n$ في الأساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ ونرمز له بالرمز $(x_1, x_2, \dots, x_n) \det_{\{v_1, \dots, v_n\}}$.

ونكتب $det(x_1, \dots, x_n)$ عندما لا يوجد أي التباس بالنسبة للأساس المستعمل .

ملاحظات :

$$\det_{\{v_1,\dots,v_n\}}(v_1, v_2, \dots, v_n) =$$

$$= \det_{\{v_1,\dots,v_n\}}(1.v_1+0.v_2+\dots+0.v_n \,,\, 0.v_1+1.v_2+\dots+0.v_n \,,\dots,\, 0.v_1+\dots+1.v_n)$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

نظرية 2.9.3

ليكن V فضاءاً شعاعياً بعده $n \geqslant 2$ على الحقل K ، ولتكن $\{v_1,\dots,v_n\}$ اساساً في V . لأي أشعة $x_1,\dots,x_n \in V$ فأن : $\det_{\{v_1,\dots,v_n\}}(x_1,\dots,x_n)$ هو شكل متعدد الخطية ومتناوب من الدرجة n على V .

البرهان :

لكل $x_1,\dots,x_n$ من V ، فأن :

$$x_1 = a_{11}v_1 + \dots + a_{n1}v_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_k = a_{1k}v_1 + \dots + a_{nk}v_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n = a_{1n}v_1 + \dots + a_{nn}v_n$$

ولكل $1 \leqslant k \leqslant n$.

ليكن $x'_k = a'_{1k}v_1 + \dots + a'_{nk}v_n$ حيث $a_{ij}, a'_{ij} \in K$ فأن :

$$\det(x_1,\dots,x_k+x'_k,\dots,x_n)=$$

$$=\det(a_{11}v_1+\dots+a_{n1}v_n,\dots,(a_{1k}+a'_{1k})v_1+\dots+(a_{nk}+a'_{nk})v_n,\dots,a_{1n}v_1+\dots+a_{nn}v_n)$$

$$=\det\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1k}+a'_{1k}\cdots a_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}\cdots a_{nk}+a'_{nk}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+i}(a_{ik}+a'_{ik})\det(A_{ik})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+i}a_{ik}\det(A_{ik})+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+i}a'_{ik}\det(A_{ik})$$

$$=\det(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n)+\det(x_1,\dots,x'_k,\dots,x_n)$$

بنفس الطريقة نبرهن أنه لكل $\lambda\in K$ ، فأن :

$$\det(x_1,\dots,\lambda x_k,\dots,x_n)=\lambda\det(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n)$$

فأنه من هنا نستنتج ان $\det(x_1,\dots,x_n)$ هو شكل متعدد الخطية من الدرجة n على V .

نبرهن على التناوب بالتراجع بالنسبة للعدد n .

ليكن $n=2$ ، ولتكن $\{v_1,v_2\}$ اساساً للفضاء الشعاعي V على الحقل K ، وليكن f شكل مزدوج الخطية على V فأن :

$$x_1=a_{11}v_1+a_{21}v_2$$

$$x_2=a_{12}v_1+a_{22}v_2$$

حيث $a_{ij}\in K$.

وإذا كان $x_1 = x_2$ فأن :

$$\det(x_1, x_2) = \det(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 , a_{11}v_1 + a_{21}v_2) = a_{11}a_{21} - a_{21}a_{11} = 0$$

فأن : $\det(x_1, x_2)$ متناوب .

لنفرض ان الفرضية صحيحة من اجل $n-1$. وليكن V فضاءاً شعاعياً ذا بعد n على الحقل K ، ولتكن $\{v_1,\dots,v_n\}$ اساساً في V ، وليكن f شكلاً متعدد الخطية من الدرجة n على V . لكل $x_1,\dots,x_n \in V$ ، وإذا كان $x_m = x_l$ حيث $1 \leq m < l \leq n$ فأن :

$$\det(x_1,\dots,x_m,\dots,x_l,\dots,x_n) = \det\begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \dots a_{1l} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nm} \dots a_{nl} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1})$$

لكن المصفوفة A_{i1} هي من الدرجة $n-1$ ، وحسب الفرضية فأن : $\det(A_{i1}) = 0$ وبذلك فأن :

$\det(x_1,\dots,x_k,\dots,x_l,\dots,x_n) = 0$ كلما تساوى أثنان من الأشعة $x_1,\dots,x_n$. فأن التطبيق $\det$ هو شكل متعدد الخطية ومتناوب من الدرجة n على V .

(و.هـ.م.)

(7.2) من خواص الاشكال المتعدد الخطية والمتناوب

وبما ان $\det$ هو شكل متعدد الخطية ومتناوب كما برهننا في النظرية السابقة فأن :

3.9.3 نتيجة

(1) نضرب محدد المصفوفة A بالعدد (-1) كلما اجرى تبديل بين اماكن اي اثنين من اعمدة المصفوفة A .

(2) لاتتغير قيمة محدد المصفوفة A ، إذا أضيف الى اي عمود من اعمدة المصفوفة A اي مزج خطي لبقية الاعمدة .

4.9.3 نظرية

ليكن K حقلاً ، ولتكن $A, B \in M_n(K)$ فأن :

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

البرهان :

لتكن $C = \begin{pmatrix} A & \Theta \\ -I_n & B \end{pmatrix}$. فأن $C \in M_{2n}(K)$. حسب (7.8.3)

فأن : $\det(C) = \det(A) \cdot \det(B)$

لنضيف الآن الى العمود $n+i$ من المصفوفة C لكل $i = 1, \dots, n$ المزج الخطي التالي :

$$b_{1i} c_1 + b_{2i} c_2 + \dots + b_{ni} c_n$$

حيث $c_1, \dots, c_n$ هي الاعمدة $1, 2, \dots, n$ من المصفوفة C . ولنرمز للمصفوفة الناتجة بالرمز C' ، فأن :

$$C' = \begin{pmatrix} A & AB \\ -I_n & \Theta \end{pmatrix}$$

حسب (8.8.3) فأن : $\det(C') = (-1)^{n^2} \det(-I_n) \det(AB)$

$$= (-1)^{n^2+n} \det(AB) = \det(AB)$$

حسب (3.9.3) فأن : $\det(C) = \det(C')$

وبذلك فأن : $\det(AB) = \det(A) . \det(B)$

(و.هـ.م.)

5.9.3 نظرية

ليكن V فضاءاً شعاعياً ذا بعد n على الحقل K،
ولتكن $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ، $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ أساسين في V
فأنه لكل $x_1, \ldots, x_n \in V$ ، فأن :

$$\det_A(x_1, \ldots, x_n) = \det_B(x_1, \ldots, x_n) \det_A(u_1, \ldots, u_n)$$

البرهان :

ليكن f شكلاً متعدد الخطية ومتناوباً من الدرجة n
على V ، فأن :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \det_A(x_1, \ldots, x_n) f(v_1, \ldots, v_n)$$

وكذلك :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \det_B(x_1, \ldots, x_n) f(u_1, \ldots, u_n)$$

و

$$f(u_1, \ldots, u_n) = \det_A(u_1, \ldots, u_n) f(v_1, \ldots, v_n)$$

من هنا ينتج أن :

$$\det_A(x_1, \ldots, x_n) f(v_1, \ldots, v_n) = \det_B(x_1, \ldots, x_n) \det_A(u_1, \ldots, u_n) f(v_1, \ldots, v_n)$$

واذا كان $f \neq f_0$ فأن : $f(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$ ، ومنه فأن

$$\det_A(x_1,\ldots,x_n) = \det_B(x_1,\ldots,x_n)\,\det_A(u_1,\ldots,u_n)$$

(و. هـ. م.)

6.9.3 نظرية

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ذا بعد n ولتكن $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ أساساً في V ، ولتكن $x_1,\ldots,x_n$ أشعة من V فإن :

$$\det_B(x_1,\ldots,x_n)=0 \iff x_1,\ldots,x_n \text{ مرتبطة خطياً}$$

البرهان :

إذا كانت الأشعة $x_1,\ldots,x_n$ مرتبطة خطياً ، فإنه توجد $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in K$ ليست كلها معدومة بحيث :

$$\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n=0$$

ولنفرض أن $\lambda_i\neq 0$ $(1\le i\le n)$ فإن :

$$x_i=\frac{-\lambda_1}{\lambda_i}x_1+\cdots+\frac{-\lambda_{i-1}}{\lambda_i}x_{i-1}+\frac{-\lambda_{i+1}}{\lambda_i}x_{i+1}+\cdots+\frac{-\lambda_n}{\lambda_i}x_n$$

$$x_i=\beta_1x_1+\cdots+\beta_{i-1}x_{i-1}+\beta_{i+1}x_{i+1}+\cdots+\beta_nx_n$$

حيث $\beta_j=\dfrac{-\lambda_j}{\lambda_i}$

فإن :

$$\det_B(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)=\det_B(x_1,\ldots,\beta_1x_1+\cdots+\beta_{i-1}x_{i-1}+\beta_{i+1}x_{i+1}+\cdots+\beta_nx_n,\ldots,x_n)$$

$$=\beta_1 det_B(x_1,\dots,x_1,\dots,x_n)+\dots+\beta_n det_B(x_1,\dots,x_n,\dots,x_n)$$

$$=\beta_1\cdot 0+\dots+\beta_n\cdot 0=0$$

لنفرض الآن أن : $det_B(x_1,\dots,x_n)=0$. إذا كانت الأشعة x_n ، ... ، x_1 مستقلة خطياً فأن $A=\{x_1,\dots,x_n\}$ تكون أساساً للفضاء V لأن عدد الأشعة في A هو n .

حسب (5.9.3) فأن :

$$det_A(x_1,\dots,x_n)=det_B(x_1,\dots,x_n)\,det_A(v_1,\dots,v_n)$$

لكن $det_B(x_1,\dots,x_n)=0$ حسب الفرض.

ولكن $det_A(x_1,\dots,x_n)=1$. وهذا تناقض، من هذا نستنتج أن الأشعة $x_1,\dots,x_n$ مرتبطة خطياً .

(و. هـ. م.)

3 . 10 إيجاد مقلوب المصفوفة

3 . 10 . 1 نظرية

ليكن K حقلاً ، ولتكن $A\in M_n(K)$ فأن :

$$A \text{ عكوس } \Longleftrightarrow det(A)\neq 0$$

البرهان :

حسب (5.5.3) فأن A عكوس $\Longleftrightarrow$ أشعة أعمدة المصفوفة A مستقلة خطياً . وكذلك حسب (6.9.3) فأن أشعة أعمدة المصفوفة A مستقلة خطياً $\Longleftrightarrow det(A)\neq 0$

فأن المصفوفة A عكوس $\Longleftrightarrow det(A)\neq 0$.

(و. هـ. م.)

2.10.3 تعريف

ليكن K حقلاً ولتكن $A \in M_n(K)$ بحيث $det(A) \neq 0$
نعرف مقلوب المصفوفة A والتي رمزنا له ب A^{-1} كمايلي:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot (B)^T$$

حيث :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

وأن $b_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$

لكل $i, j = 1, \ldots, n$. وتسمى B^T احياناً بالمرافق التقليدي للمصفوفة A ويرمز لها بالرمز $adj(A)$.

3.10.3 نظرية

ليكن K حقلاً ، ولتكن $A \in M_n(K)$ مصفوفة عكوسة فأن : $det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$

البرهان :

بما ان A عكوس فأن $det(A) \neq 0$ ، فأن :

$$\begin{aligned} det(A^{-1}) &= det(A^{-1})\left(det(A) \cdot (det(A))^{-1}\right) \\ &= \left(det(A^{-1}) \cdot det(A)\right) \cdot (det(A))^{-1} \\ &= det(A^{-1}A) \cdot (det(A))^{-1} \\ &= det(I_n)(det(A))^{-1} = 1 \cdot (det(A))^{-1} = (det(A))^{-1} \end{aligned}$$

(و.هـ.م.)

4.10.3 نظرية

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، ولتكن $C = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ، $D = \{u_1, \ldots, u_n\}$ اساسين في V ، وليكن f تطبيقاً خطياً من V في V . ولتكن A المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f في الأساس C ، ولتكن B المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f في الأساس D فأن $\det(A) = \det(B)$.

البرهان :

لتكن P هي مصفوفة العبور من الاساس C الى الأساس D ، فأنه حسب (3.7.3 فرع (5)) فأن:

$$B = P^{-1} A P$$

فأن :

$$\det(B) = \det(P^{-1} A P) = \det(P^{-1}) \det(A) . \det(P)$$
$$= \det(A)$$

(و.هـ.م.)

نلاحظ من هذه النظرية ان محدد المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي لا يعتمد على أختيار الأساس .

5.10.3 تعريف

ليكن V فضاءاً شعاعياً ذا بعد منتهي على الحقل

K، وليكن f تطبيقاً خطياً من V في V . نسمي محدد المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f في اي اساس للفضاء الشعاعي V بمحدد التطبيق الخطي f ونرمز له بالرمز $\det(f)$.

6.10.3 نظرية

ليكن V فضاءً شعاعياً ذا بعد منتهي على الحقل K . لكل تطبيقين خطيين f ، g من V في V فأن :

(1) $\det(Id_V)=1$

(2) $\det(f\circ g) = \det(f).\det(g)$

(3) f تقابل $\Longleftrightarrow$ $\det(f)\neq 0$

(4) وإذا كان f تقابلاً فأن : $\det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}$

البرهان :

(1) بما ان المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي Id_V هي I_n ، فأنه حسب (5.8.3) $\det(I_n)=1$.

وحسب (5.10.3) ينتج ان $\det(Id_V)=1$.

(2) لتكن A المصفوفة المرافقة لـ f ، B المصفوفة المرافقة لـ g فأنه حسب (4.9.3) ، $\det(A.B)=\det(A).\det(B)$. حسب (5.10.3) فأن :

$\det(f\circ g) = \det(f).\det(g)$

(3) لتكن A المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f ، فإنه حسب النظرية (3 . 10 . 1) A عكوس $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$. لكن حسب النظرية (3 . 5 . 5) فإن A عكوس $\Leftrightarrow$ f تقابل ، فإن f تقابل $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$ أي ان f تقابل $\Leftrightarrow$ $\det(f) \neq 0$.

(4) لتكن A المصفوفة المرافقة لـ f . بما ان f تقابل فأن A عكوس ، فأن f^{-1} هو التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A^{-1} . حسب النظرية (3 . 10 . 3) فأن

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$$

فأنه حسب (3 . 10 . 5)

$$\det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}$$

(و.هـ.م.)

- تمارين -

(1) لتكن $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 5 & -4\end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix}6 & 1 & -7\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}$ ،

$$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -3 & 1 & 4\\ -2 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

أوجد :

(a) $2A+B$ ،

(b) AC .

(c) $3A^T - 2B^T$.

(d) هل CA ، AB معرفتين .

(e) أوجد $Tr(C)$.

(2) ليكن $\mathbb{C}$ فضاءً شعاعياً على الحقل $\mathbb{R}$ ، $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ تطبيقاً خطياً معرفاً كالآتي :

$\forall\ z\in\mathbb{C}\ ;\ f(z)=\bar{z}$.

اوجد المصفوفة المرافقة للتطبيق f بالنسبة لكل من الاساس a) $\{1, i\}$ ، b) $\{(1+i), (1+2i)\}$

(3) لتكن في $M_2(\mathbb{R})$:

$$F_1=\left\{\begin{pmatrix}a & c\\ 0 & 0\end{pmatrix}\ ;\ a, c\in\mathbb{R}\right\}$$

و

$$F_2=\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ b & d\end{pmatrix}\ ;\ b, d\in\mathbb{R}\right\}$$

(a) برهن ان F_1 ، F_2 هما فضاءان شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي $M_2(\mathbb{R})$.

(b) اوجد $F_1 \cap F_2$ ، $F_1 + F_2$.

(c) هل أن $M_2(\mathbb{R}) = F_1 \oplus F_2$ ؟ .

(d) أوجد أساس لكل من F_1 ، F_2 . ثم استنتج أساساً للفضاء $M_2(\mathbb{R})$.

(4) ليكن $\mathbb{R}^2$ فضاءاً شعاعياً على الحقل $\mathbb{R}$. ولتكن

$$A = \{ v_1 = (1,2) , v_2 = (2,1) \}$$

و

$$B = \{ u_1 = (1,3) , u_2 = (3,1) \}$$

أساسين في الفضاء $\mathbb{R}^2$. وليكن $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ تطبيقاً خطياً معرفاً كالآتي :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 , x_1 - x_2)$$

اوجد المصفوفة المرافقة للتطبيق f .

(5) لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f . ولتكن $A = \{ e_1 = (1,0) ، e_2 = (1,1) \}$ أساساً في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ على الحقل $\mathbb{R}$ ، ولتكن $B = \{ f_1 = (1,1,0) , f_2 = (2,1,1) , f_3 = (0,0,1) \}$ أساساً في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$.

(a) أوجد التطبيق f .

(b) اوجد المصفوفة المرافقة للتطبيق f

وإذا كانت: $A' = \{e'_1 = (0,1)\ ,\ e'_2 = (2,1)\}$ ، أساساً في $\mathbb{R}^2$
و $B' = \{f'_1 = (1,0,0)\ ,\ f'_2 = (0,1,0)\ ,\ f'_3 = (0,0,1)\}$ أساساً في $\mathbb{R}^3$.

(6) ليكن $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ تطبيقاً خطياً معرفاً كالآتي :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ f(x,y,z) = (3x+2y-4z\ ,\ x-5y+3z)$$

ولتكن $A = \{v_1 = (1,3)\ ,\ v_2 = (2,5)\}$ اساساً في $\mathbb{R}^2$ ،
$B = \{u_1 = (1,1,1)\ ,\ u_2 = (1,1,0)\ ,\ u_3 = (1,0,0)\}$ اساساً في $\mathbb{R}^3$.
أوجد المصفوفة المرافقة للتطبيق f .

(7) a) اثبت أنه لكل $A, B \in M_{m,n}(K)$ ولكل $\lambda \in K$.

(1) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(2) $(A.B)^T = B^T . A^T$

(3) $(\lambda A)^T = \lambda . A^T$

(b) اثبت انه لكل $A, B \in M_n(K)$ ولكل $\lambda \in K$.

(1) $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$

(2) $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$

(8) أوجد مرتبة المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & -7 & -2 \end{pmatrix}$$

(9) لتكن $A = \{ e_1 = (0,0,-1)\ ,\ e_2 = (0,-1,0)\ ,\ e_3 = (1,-1,0) \}$
و $B = \{ f_1 = (2,0,1)\ ,\ f_2 = (0,1,1)\ ,\ f_3 = (1,1,-1) \}$
أساسين في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$.

(a) اوجد مصفوفة العبور P من الاساس A الى الأساس B .

(b) هل ان P عكوس ؟ .

(c) أوجد P^T .

(10) ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K بعده 3،
لتكن $A = \{ a_1, a_2, a_3 \}$ ، $B = \{ a'_1 = a_1\ ,\ a'_2 = a_1 + a_2\ ,\ a'_3 = a_1 + a_2 + a_3 \}$
اساسين في الفضاء V .

(a) اوجد مصفوفة العبور P من الاساس A الاساس B .

(b) هل ان P عكوس ؟ .

(11) ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K بعده 2 ،
ولتكن $\{e_1, e_2\}$ اساساً في V ، وليكن $f, g : V \to V$
تطبيقين خطيين معرفين كالآتي :
$f(e_1) = 5e_1 + e_2$ ، $f(e_2) = e_1 + e_2$ ، $g(e_1) = 2e_1 - e_2$ ،
$g(e_2) = 3e_1 + 2e_2$.

(a) اوجد المصفوفة المرافقة لكل من f ،
g ، $f \circ g$ ، $g \circ f$.

(ب) إذا كانت A مصفوفة مرافقة للتطبيق الخطي f ، B مصفوفة مرافقة للتطبيق الخطي g ، C مصفوفة مرافقة للتطبيق الخطي $f\circ g$ ، D مصفوفة مرافقة للتطبيق الخطي $g\circ f$ ، اوجد C ، D بدلالة A ، B .

(12) لتكن $A=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 9 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. إذا كانت E اساساً نظامياً في $\mathbb{R}^2$ ، F اساساً نظامياً في $\mathbb{R}^3$ ، اوجد التطبيق الخطي f المرافق للمصفوفة A . إذا كانت $F' = \{(0,0,3), (0,2,0), (1,0,0)\}$ اساساً آخر في $\mathbb{R}^3$ ، اوجد مصفوفة العبور H من الأساس F' الى الاساس F .

(13) اوجد المصفوفة العكوسة لكل من :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(14) احسب :

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix} \quad , \quad \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -7 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(15) لتكن :

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$ ، أحسب $\det(A\cdot B)$.

(16) لتكن $A \in M_n(K)$ ، برهن ان : $A(\operatorname{adj} A) = \det(A).I_n$

(17) أثبت ان :

(a)
$$\det\begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ a^2+2 & ab+1 & b^2 \\ a^2-1 & ab & b^2+1 \end{pmatrix} = (a-b)^2$$

(b)
$$\det\begin{pmatrix} a & a & b+c \\ a+c & b & b \\ c & a+b & c \end{pmatrix} = 4abc$$

(c)
$$\det\begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix} = (a+b+c)^3$$

(18) ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K لبعده 3 ، ولتكن $B=\{b_1,b_2,b_3\}$ اساساً في V . برهن انه لماذا تساوى شعاعان من الاشعة x_1,x_2,x_3 في V فأن : $\det_B(x_1,x_2,x_3)=0$

الفصل الرابع
الفضاء الأقليدي والهيرميتي

1.4 الأشكال التربيعية

1.1.4 تعريف

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K، وليكن f شكلاً مزدوج الخطية على V. نقول ان f هو شكل متماثل إذا كان لكل $x,y \in V$: $f(x,y) = f(y,x)$.

2.1.4 تعريف

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ذا بعد n . ولتكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ اساساً في V ، وليكن f شكلاً مزدوج الخطية على V ، فأنه لكل $u, v \in V$:

$u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ ، $v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$ حيث $\alpha_i, \beta_i \in K$. فأن :

$$\begin{aligned} f(v,u) &= f(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \,,\, \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= \beta_1\alpha_1 f(v_1,v_1) + \beta_1\alpha_2 f(v_1,v_2) + \dots + \beta_1\alpha_n f(v_1,v_n) + \\ &+ \beta_2\alpha_1 f(v_2,v_1) + \beta_2\alpha_2 f(v_2,v_2) + \dots + \beta_2\alpha_n f(v_2,v_n) + \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ &+ \beta_n\alpha_1 f(v_n,v_1) + \beta_n\alpha_2 f(v_n,v_2) + \dots + \beta_n\alpha_n f(v_n,v_n) \end{aligned}$$

اي ان : $f(v,u) = \sum_{i,j=1}^{n} f(v_i,v_j)\,\beta_i\alpha_j$ حيث $f(v_i,v_j) \in K$

ليكن $f(v_i, v_j) = a_{ij}$ ، فإنه لكل اساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ في الفضاء الشعاعي V ، كل شكل مزدوج الخطية يكتب بالشكل :

$$f(v, u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \beta_i \alpha_j$$

حيث β_i هي مركبات الشعاع v ، α_j هي مركبات الشعاع u في الاساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ ، والحدود السلمي $a_{ij} = f(v_i, v_j)$ يعتمد على اختيار الأساس .

المصفوفة $A = (a_{ij})$ تسمى المصفوفة المرافقة للشكل مزدوج الخطية f في الاساس $\{v_1, \dots, v_n\}$.

لنرى الآن ماذا يحدث عند تغيير الاساس . لتكن $\{u_1, \dots, u_n\}$ اساساً آخراً في الفضاء V . فأن :

$$u_1 = c_{11} v_1 + c_{21} v_2 + \dots + c_{n1} v_n$$

$$u_2 = c_{12} v_1 + c_{22} v_2 + \dots + c_{n2} v_2$$

$$\text{-------------------------}$$

$$u_n = c_{1n} v_1 + c_{2n} v_2 + \dots + c_{nn} v_n$$

حيث $c_{ij} \in K$. فأن مصفوفة العبور من الأساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ الى الاساس $\{u_1, \dots, u_n\}$ هي :

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

ولتكن $A = (a_{ij})$ المصفوفة المرافقة للشكل مزدوج

الخطية f في الأساس $\{v_1, \dots, v_n\}$. نبحث عن المصفوفة $B = (b_{ij})$ المرافقة للشكل f في الأساس $\{u_1, \dots, u_n\}$. لكل $1 \leq p \leq i$ و $j \leq q \leq 1$ فأن :

$$b_{pq} = f(u_p, u_q) = f(c_{1p} v_1 + c_{2p} v_2 + \cdots + c_{np} v_n , c_{1q} v_1 + c_{2q} v_2 + \cdots + c_{nq} v_n)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} f(v_i, v_j)\, c_{ip}\, c_{jq}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, c_{ip}\, c_{jq}$$

من هنا فأن :

$$b_{pq} = \sum_{i,j=1}^{n} c'_{pi}\, a_{ij}\, c_{jq}$$

حيث $c'_{pi} = c_{ip}$ هي عناصر المصفوفة C^T والتي هي منقول المصفوفة C اي ان : $B = C^T A C$.

3.1.4 مثال .

لنأخذ الأساس النظامي $\{e_1, e_2, e_3\}$ في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$. وليكن $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ شكلاً معرفاً كالآتي :

$$\forall\, x = (x_1, x_2, x_3)\ ,\ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 ,$$

$$f(x, y) = x_1 y_1 - 4 x_2 y_3 + 6 x_1 y_2$$

حيث x_i هي مركبات الشعاع x ، y_i هي مركبات الشعاع y في الاساس النظامي .

لنبرهن ان f شكل مزدوج الخطية . لكل $x' = (x'_1, x'_2, x'_3) \in \mathbb{R}^3$ فأن :

فأن :

$$f(x+x',y)=f((x_1+x'_1,\ x_2+x'_2,\ x_3+x'_3),(y_1,y_2,y_3))$$
$$=(x_1+x'_1)y_1-4(x_2+x'_2)y_3+6(x_1+x'_1)y_2$$
$$=(x_1y_1-4x_2y_3+6x_1y_2)+(x'_1y_1-4x'_2y_3+6x'_1y_2)$$
$$=f(x,y)+f(x',y)$$

ولكل $\lambda\in\mathbb{R}$ فأن :

$$f(\lambda x,y)=f((\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3),(y_1,y_2,y_3))$$
$$=\lambda x_1y_1-4\lambda x_2y_3+6\lambda x_1y_2$$
$$=\lambda f(x,y)$$

وبنفس الطريقة نبرهن انه لكل $y'\in\mathbb{R}^3$ فأن :

$$f(x,y+y')=f(x,y)+f(x,y')$$
$$،f(x,\lambda y)=\lambda f(x,y)$$

لذلك فأن f شكل مزدوج الخطية على $\mathbb{R}^3$.

نجد الآن المصفوفة المرافقة للشكل f .

حيث $\{e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1)\}$ عبارة عن الاساس النظامي في $\mathbb{R}^3$ ، فأن :

$$a_{11}=f(e_1,e_1)=1\ ,\ a_{12}=f(e_1,e_2)=6\ ,\ a_{13}=f(e_1,e_3)=0$$
$$a_{21}=f(e_2,e_1)=0\ ,\ a_{22}=f(e_2,e_2)=0\ ,\ a_{23}=f(e_2,e_3)=-4$$
$$a_{31}=f(e_3,e_1)=0\ ,\ a_{32}=f(e_3,e_2)=0\ ,\ a_{33}=f(e_3,e_3)=0$$

فأن المصفوفة المرافقة للشكل f هي :

$$A=\begin{pmatrix}1&6&0\\0&0&-4\\0&0&0\end{pmatrix}$$

لتكن $\{u_1=(1,1,-1)\ ,\ u_2=(0,1,2)\ ,\ u_3=(0,0,1)\}$ اساساً
اخراً في V . فأن :

$$u_1 = 1\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + (-1)\,e_3$$

$$u_2 = 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 2\cdot e_3$$

$$u_3 = 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 1\cdot e_3$$

فأن : $c_{11} = 1\ ,\ c_{21} = 1\ ,\ c_{31} = -1$

$c_{12} = 0\ ,\ c_{22} = 1\ ,\ c_{32} = 2$

$c_{13} = 0\ ,\ c_{23} = 0\ ,\ c_{33} = 1$

فأن مصفوفة العبور C من الاساس $\{e_1, e_2, e_3\}$ الى الاساس
$\{u_1, u_2, u_3\}$ هي :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

فأن :

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

من هنا فأن المصفوفة B الموافقة للشكل الخطي f في
الأساس $\{u_1, u_2, u_3\}$ هي :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 14 & 4 \\ 4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

تعريف 4.1.4

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، وليكن f شكلاً مزدوج الخطية ومتماثلاً على V . التطبيق $\varphi : V \to K$ نسميه شكلاً تربيعياً مرتبطاً بالشكل المزدوج الخطية والمتماثل f إذا كان لكل $v \in V$ ، $\varphi(v) = f(v,v)$ ، ونقول عن f انه الشكل القطبي المرتبط بالشكل التربيعي φ .

المصفوفة المرافقة للشكل التربيعي φ هي المصفوفة المرافقة للشكل القطبي f .

نقول ان الشكل التربيعي φ محددة موجبة إذا كان لكل

$$v \in V \ , \ \varphi(v) \geqslant 0 \quad و \quad \varphi(v) = 0 \iff v = 0$$

نلاحظ انه لكل $x, y \in V$ فأن :

$$f(x+y\,,\,x+y) = f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y)$$

فأن :

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(f(x+y\,,x+y) - f(x,x) - f(y,y)\right)$$

ومنه

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y)\right)$$

اي ان الشكل المزدوج الخطية والمتماثل f يعين بواسطة شكله التربيعي المرافق له . وتسمى هذه الكتابة الأخيرة بالكتابة القطبية للشكل f .

نلاحظ كذلك انه لكل $v \in V$ ولكل $\lambda \in K$ فأن :

$$\varphi(\lambda v) = f(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 f(v,v) = \lambda^2 \varphi(v)$$

5.1.4 نظرية

المصفوفة المرافقة للشكل التربيعي هي مصفوفة متماثلة .

البرهان :

ليكن V فضاءاً شعاعياً ذا بعد n على الحقل IK، وليكن f شكلاً مزدوج الخطية ومتماثل على V . وليكن φ شكلاً تربيعياً مرتبطاً بالشكل المزدوج الخطية والمتماثل f. ولتكن $\{v_1,\dots,v_n\}$ اساساً في V ، فإنه لكل $x\in V$ فإن $x=\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n$:

$$\varphi(x) = f(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$$

حيث λ_i هي مركبات الشعاع x في الاساس $\{v_1,\dots,v_n\}$ ، $A=(a_{ij})$ هي المصفوفة المرافقة للشكل التربيعي φ.

نلاحظ هنا انه لكل $1\leq i,j\leq n$ ، بما ان f متماثل فإن :
$$a_{ij} = f(v_i,v_j) = f(v_j,v_i) = a_{ji}$$
لذلك فإن المصفوفة A المرافقة للشكل التربيعي φ هي متماثلة .

(و.هـ.م.)

6.1.4 مثال

التطبيق $\varphi : IR^2 \to IR$ المعرف بالشكل التالي :

$$\forall x=(x_1,x_2)\in IR^2 ;\ \varphi(x)=\varphi(x_1,x_2) = 2x_1^2-3x_1x_2+x_2^2$$

هو شكل تربيعي على الفضاء الشعاعي IR^2 على الحقل IR.

لكل $y=(y_1,y_2)\in IR^2$ فأن الشكل المزدوج الخطية والمتماثل المرتبط بالشكل φ هو :

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x+y)-\varphi(x)-\varphi(y)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\varphi(x_1+y_1,x_2+y_2)-\varphi(x_1,x_2)-\varphi(y_1,y_2)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[2(x_1+y_1)^2-3(x_1+y_1)(x_2+y_2)+(x_2+y_2)^2-2x_1^2+3x_1x_2-x_2^2-\right.$$
$$\left.-2y_1^2+3y_1y_2-y_2^2\right]$$

$$f(x,y)=2x_1y_1-\frac{3}{2}x_1y_2-\frac{3}{2}x_2y_1+x_2y_2$$

فأن f شكل مزدوج الخطية ومتماثل.

وكذلك لكل $x=(x_1,x_2)\in IR^2$ فأن : $\varphi(x)=f(x,x)$

لنأخذ الاساس النظامي $\{e_1=(1,0)\ ,\ e_2=(0,1)\}$ في IR^2 ، ولنوجد المصفوفة المرافقة للشكل التربيعي φ . اي انا لنوجد المصفوفة المرافقة للشكل المزدوج الخطية والمتماثل f في الاساس النظامي في IR^2 .

$$a_{11}=f(e_1,e_1)=2\quad,\quad a_{12}=f(e_1,e_2)=-\frac{3}{2}$$
$$a_{21}=f(e_2,e_1)=\frac{-3}{2}\quad,\quad a_{22}=f(e_2,e_2)=1$$

فأن المصفوفة A المرافقة للشكل المزدوج الخطية والمتماثل f هي :

$$A=\begin{pmatrix}2 & -\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$$

وهي المصفوفة المرافقة للشكل التربيعي φ ، ونلاحظ ان المصفوفة A متماثلة .

7.1.4 تعريف

ليكن V فضاءً شعاعياً بعده n على الحقل K.
وليكن f شكلاً مزدوج الخطية ومتماثل على V، وليكن
$\varphi : V \to K$ شكلاً تربيعياً مرتبطاً بالشكل f.
لتكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ اساساً في V، ولتكن $A = (a_{ij})$
المصفوفة المرافقة للشكل f، فأنه لكل $x \in V$:

$$\varphi(x) = f(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

حيث $x_1, \dots, x_n$ هي
مركبات الشعاع x في الاساس $\{v_1, \dots, v_n\}$.
فأذا وجد أساس $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ في V بحيث ان:

$$\varphi(x) = a'_{11} x'^2_1 + \dots + a'_{nn} x'^2_n$$

حيث x'_i هي مركبات الشعاع x في الاساس $\{v'_1, \dots, v'_n\}$
و $a'_{ii} \in K$، عندئذ نقول ان للشكل التربيعي φ الصيغة
القانونية (أو القطرية) في الاساس $\{v'_1, \dots, v'_n\}$.

8.1.4 تحويل الشكل التربيعي الى الصيغة القانونية (القطرية)

ليكن V فضاءً شعاعياً ذا بعد n على الحقل
K، ولتكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ اساساً في V، وليكن
f شكلاً مزدوج الخطية ومتماثلاً على V و $\varphi : V \to K$
شكلاً تربيعياً مرتبطاً بالشكل f. لتكن $A = (a_{ij})$
المصفوفة المرافقة للشكل f، فأنه لكل $x \in V$:

$$\varphi(x) = f(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j \quad \dots (1)$$

حيث $x_1, \dots, x_n$ هي مركبات الشعاع x في الاساس $\{v_1, \dots, v_n\}$.

(1) طريقة لاكرانك

سنبحث عن اساس اخر في V بحيث ان (1) يكتب بشكل نحذف فيها كل الحدود التي يكون فيها $j \neq i$.

اذا وجد $1 \leq k \leq n$ بحيث $a_{kk} \neq 0$ ، فأننا نعيد ترقيم العوامل ، ونرمز لهذا العامل ب a'_{11} . اذا كان لكل $1 \leq k \leq n$ ، $a_{kk} = 0$ ، فأنه يوجد احد العوامل وليكن $a_{ij} \neq 0$ ($i \neq j$) والا لكان φ تطبيقاً صفرياً . لنفرض ان $a_{12} \neq 0$ ، بما أن φ هو شكل تربيعي فأن المصفوفة المرافقة له هي مصفوفة متماثلة ، فأن $a_{12} = a_{21}$ ، من هنا فأن $2a_{12}x_1x_2 \neq 0$. عندئذ نضع $x_1 = x'_1 + x'_2$ ، $x_2 = x'_1 - x'_2$ ، $x_k = x'_k$ ، لكل $k = 3, \ldots, n$.

فيكون $2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(x'^2_1 - x'^2_2)$ نجد ان العامل عند x'^2_1 يختلف عن الصفر ، ونعيد الترقيم ونرمز له a'_{11} .

بناءاً على ما سبق نرى انه يمكننا ان نفرض ان $a_{11} \neq 0$ (أو بعد الترقيم نفرض ان $a'_{11} \neq 0$) .

في (1) الحدود التي تحوي على x_1 هي :

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$

نكمل هذا الحد الى مربع كامل فيكون لدينا :

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)^2 - B$$

حيث B يحوي على مجموع مربعات وحاصل ضرب العناصر $\{a_{12}x_2, a_{13}x_3, \ldots, a_{1n}x_n\}$.

بالتعويض في (1) ينتج أن :

$$\varphi(x) = f(x,x) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)^2 + \dots .$$

حيث الحدود الغير مكتوبة هي بدلالة $x_2, \dots, x_n$.

نفرض الآن أن :

$$y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$$

$$y_2 = x_2$$

$$y_n = x_n$$

وبذلك فأن :

$$\varphi(x) = f(x,x) = \frac{1}{a_{11}}y_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij}\, y_i\, y_j$$

نلاحظ ان المقدار $\sum_{i,j=2}^{n} b_{ij}\, y_i\, y_j$ مشابهة الى المقدار (1) عدا ان المجموع يبدأ من 2 .

بنفس الطريقة نفرض ان $b_{22} \neq 0$ ونعيد نفس العملية فيكون :

$$z_1 = y_1$$

$$z_2 = b_{22}y_2 + b_{23}y_3 + \dots + b_{2n}y_n$$

$$z_3 = y_3$$

$$z_n = y_n$$

فأن :

$$\varphi(x) = f(x,x) = \frac{1}{a_{11}}z_1^2 + \frac{1}{b_{22}}z_2^2 + \sum_{i,j=3}^{n} c_{ij}\, z_i\, z_j$$

وهكذا نعيد العملية هذه ونحصل على :

$$\varphi(x) = f(x,x) = \lambda_{11}d_1^2 + \lambda_{22}d_2^2 + \dots + \lambda_{nn}d_n^2$$

حيث $\lambda_{ii} \in K$ ، $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ هي مركبات الشعاع x في أساس اخر جديد $\{u_1, \ldots, u_n\}$ في V .

لايجاد هذا الاساس الجديد نكتب كل من $x_1, \ldots, x_n$ بدلالة $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ، ثم باستعمال (3.7.3 فرع (2)) نوجد مصفوفة العبور من الاساس $\{v_1, \ldots, v_n\}$ الى الأساس الجديد $\{u_1, \ldots, u_n\}$ ، بما ان $\{v_1, \ldots, v_n\}$ معروف فأننا نوجد الاساس $\{u_1, \ldots, u_n\}$.

(2) طريقة جاكوبي (سنقتصر على ذكر هذه الطريقة فقط)

اذا كان كل المحددات $\Delta_1 = a_{11}$ ، $\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \ldots$

$\ldots\ldots \Delta_n = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ تختلف عن الصفر .

فأنه يوجد الاساس $\{u_1, \ldots, u_n\}$ في V بحيث ان الشكل التربيعي φ يأخذ الشكل

$$\varphi(x) = f(x,x) = \frac{1}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} y_n^2$$

حيث $y_1, \ldots, y_n$ هي مركبات الشعاع x في الاساس الجديد $\{u_1, \ldots, u_n\}$.

4.1.9 مثال

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ذا بعد 3 ولتكن $\{v_1, v_2, v_3\}$ اساساً في V .

وليكن $\varphi(x) = f(x,x) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 8x_3^2$ شكلاً تربيعياً على V ، حيث x_1, x_2, x_3 هي مركبات الشعاع x في الاساس $\{v_1, v_2, v_3\}$. نضع :

$$x_1 = y_2 \quad , \quad x_2 = y_1 \quad , \quad x_3 = y_3$$

فأن :

$$\begin{aligned}\varphi(x) = f(x,x) &= -y_1^2 + 2y_1y_2 + 4y_2y_3 - 8y_3^2 \\ &= -(y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2) + y_2^2 + 4y_2y_3 - 8y_3^2 \\ &= -(y_1 - y_2)^2 + y_2^2 + 4y_2y_3 - 8y_3^2\end{aligned}$$

نضع :

$$z_1 = (y_1 - y_2) = y_1 - y_2 \quad , \quad z_2 = y_2 \quad , \quad z_3 = y_3$$

فأن :

$$\begin{aligned}\varphi(x) = f(x,x) &= -z_1^2 + z_2^2 + 4z_2z_3 - 8z_3^2 \\ &= -z_1^2 + (z_2 + 2z_3)^2 - 12z_3^2.\end{aligned}$$

نضع :

$$d_1 = z_1 \quad , \quad d_2 = z_2 + 2z_3 \quad , \quad d_3 = z_3$$

فأن :

$$\varphi(x) = f(x,x) = -d_1^2 + d_2^2 - 12d_3^2$$

حيث d_1, d_2, d_3 هي مركبات الشعاع x في الاساس الجديد $\{u_1, u_2, u_3\}$. لنبحث عن هذا الاساس ، بالتعويض نحصل على :

$$d_1 = z_1 = -y_1 + y_2 = x_2 - x_1$$

$$d_2 = z_2 + 2z_3 = y_2 + 2y_3 = x_1 + 2x_3$$

$$d_3 = z_3 = y_3 = x_3$$

من هنا فأن :

$$x_1 = d_2 - 2d_3$$
$$x_2 = d_1 + d_2 - 2d_3$$
$$x_3 = d_3$$

فأن مصفوفة العبور من الاساس $\{v_1, v_2, v_3\}$ الى الاساس $\{u_1, u_2, u_3\}$ هي :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

فاذا عرفنا الاساس $\{v_1, v_2, v_3\}$ فأننا نجد الاساس $\{u_1, u_2, u_3\}$.

4 . 2 الفضاء الأقليدي

4 . 2 . 1 تعريف

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل $\mathbb{R}$ ، نقول ان التطبيق $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ هو حاصل الضرب السلمي على V إذا تحقق مايلي :-

(1) لكل $v_1, v_2 \in V$ ، $f(v_1, v_2) = f(v_2, v_1)$

(2) لكل $v_1, v_2 \in V$ ولكل $\lambda \in \mathbb{R}$ ، $f(\lambda v_1, v_2) = \lambda f(v_1, v_2)$

(3) لكل $v_1, v_2, v_3 \in V$ ، $f(v_1 + v_3, v_2) = f(v_1, v_2) + f(v_3, v_2)$

(4) لكل $v \in V$ ، $f(v, v) > 0$ و $f(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$

ونكتب عادة $v_1 \circ v_2$ بدلاً عن $f(v_1, v_2)$.

نلاحظ من التعريف مباشرة انه لكل $v_1, v_2, v_3 \in V$ فأن :

$$v_1 \circ (v_2 + v_3) = (v_2 + v_3) \circ v_1 = v_2 \circ v_1 + v_3 \circ v_1 = v_1 \circ v_2 + v_1 \circ v_3$$

وكذلك لكل $\lambda \in \mathbb{R}$ فأن :

$$v_1 \circ \lambda v_2 = \lambda v_2 \circ v_1 = \lambda (v_2 \circ v_1) = \lambda (v_1 \circ v_2)$$

من هنا ومن تعريف الضرب السلمي ينتج مباشرة النظرية التالية :-

2.2.4 نظرية

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل $\mathbb{R}$ ، فأن $f : V \times V \to \mathbb{R}$ هو ضرب سلمي على V $\Leftrightarrow$ f شكل مزدوج الخطية ومتماثل على V والشكل التربيعي المرافق له محددة موجبة .

3.2.4 مثال

على الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^n$ على الحقل $\mathbb{R}$ لنعرف التطبيق $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ كمايلي :

لكل $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ واذا كان $v_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ، $v_2 = (\beta_1, \dots, \beta_n)$

فأن : $f(v_1, v_2) = v_1 \circ v_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$

من الواضح أن f تحقق جميع الشروط في تعريف الضرب السلمي .

4.2.4 تعريف

نسمي الفضاء الشعاعي E، ذا البعد المنتهي على الحقل $\mathbb{R}$، والمعرف عليه الضرب السلمي، فضاءً أقليدياً. فإذا كان $\circ$ ضرباً سلمياً على E، نرمز للفضاء الأقليدي E بالرمز $(E,\circ)$. نسمي الفضاء الشعاعي الجزئي E_1 من الفضاء الشعاعي E بالفضاء الأقليدي الجزئي من E.

5.2.4 تعريف

ليكن $(E,\circ)$ فضاءً أقليدياً. لكل $v \in E$ نعرف طول الشعاع v بأنه المقدار $\sqrt{v \circ v}$ ونرمز له بالرمز $\|v\|$ اي ان، $\|v\| = \sqrt{v \circ v}$.

6.2.4 نظرية

ليكن $(E,\circ)$ فضاءً اقليدياً فأنه :

(1) لكل $v \in E$ ، $v = 0 \Longleftrightarrow \|v\| = 0$

(2) لكل $v \in E$ ولكل $\lambda \in \mathbb{R}$ ، $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

(3) لكل $v_1, v_2 \in E$ ، $|v_1 \circ v_2| \leq \|v_1\| \cdot \|v_2\|$

وتسمى هذه الخاصية، بخاصية كوشي شفارز .

(4) لكل $v_1, v_2 \in E$ ، $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$

وتسمى هذه الخاصية، بالخاصية المثلثية .

البرهان :

(1) لكل $v \in E$ فأن $\|v\| = \sqrt{v \circ v}$ وكذلك حسب (1.2.4) فأن : $v \circ v = 0 \Longleftrightarrow v = 0$ وبذلك فأن : $\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$

(٢) لكل $v \in E$ ولكل $\lambda \in \mathbb{R}$ فأن :

$$\|\lambda v\| = \sqrt{\lambda v \circ \lambda v} = \sqrt{\lambda^2 (v \circ v)} = |\lambda| \sqrt{v \circ v} = |\lambda| \|v\|$$

(٣) لكل $v_1 , v_2 \in E$ وإذا كان v_1 هو الشعاع الصفري

(أو v_2 هو الشعاع الصفري) فأن : $\|v_1\| \cdot \|v_2\| = 0$

وكذلك $|v_1 \circ v_2| = 0$ فأن : $|v_1 \circ v_2| = \|v_1\| \cdot \|v_2\|$.

لنفرض ان v_1 , v_2 غير معدومان فأنه يوجد $c \in \mathbb{R}$ بحيث

$\|v_2\| = c\|v_1\|$ من هنا فأن :

$$v_2 \circ v_2 = \|v_2\|^2 = \|v_2\| \cdot \|v_2\|$$

$$= c\|v_1\| \cdot c\|v_1\| = c^2 \|v_1\|^2 = c^2 (v_1 \circ v_1)$$

ومن هنا فأن ،

$$0 \leq (cv_1 \pm v_2) \circ (cv_1 \pm v_2) = c^2 (v_1 \circ v_1) + (v_2 \circ v_2) \pm 2c(v_1 \circ v_2)$$

اعي ان :

$$\pm 2c(v_1 \circ v_2) \leq c^2 (v_1 \circ v_1) + (v_2 \circ v_2)$$

فأن :

$$\pm 2c(v_1 \circ v_2) \leq c^2 \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$$

وبذلك

$$\pm 2c(v_1 \circ v_2) \leq c\|v_1\| \cdot \|v_2\| + c\|v_1\| \cdot \|v_2\|$$

فأن :

$$\pm 2c(v_1 \circ v_2) \leq 2c\|v_1\| \|v_2\|$$

وبذلك فأن :

$$|v_1 \circ v_2| \leq \|v_1\| \|v_2\|$$

(4) لكل $v_1, v_2 \in E$ فأن :

$$\|v_1 + v_2\|^2 = (v_1 + v_2) \circ (v_1 + v_2) = v_1 \circ v_1 + 2(v_1 \circ v_2) + (v_2 \circ v_2)$$

$$\leq \|v_1\|^2 + 2\|v_1\| \cdot \|v_2\| + \|v_2\|^2 = (\|v_1\| + \|v_2\|)^2$$

فأن :

$$\|v_1 + v_2\|^2 \leq (\|v_1\| + \|v_2\|)^2$$

أي أن :

$$\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$$

(و. هـ. م.)

4 . 3 الفضاءات الأقليدية الجزئية المتعامدة

4 . 3 . 1 تعريف

ليكن $(E, \circ)$ فضاءً اقليدياً ، لكل $v_1, v_2 \in E$ نعرف الزاوية θ بين الشعاعين v_1 , v_2 بأنها :

$$\theta = \arccos\left(\frac{v_1 \circ v_2}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}\right)$$

أي أن :

$$\cos\theta = \frac{v_1 \circ v_2}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}$$

حيث $0 \leq \theta \leq \pi$

ونقول ان v_1 , v_2 متعامدان اذا كانت الزاوية بينهما هي $\frac{\pi}{2}$. من هنا نرى ان v_1 , v_2 متعامدان $\iff$ $v_1 \circ v_2 = 0$. ونقول أن v_1 عمودي على v_2 (أو ان v_2

عمودي على v_1) ونكتب $v_1 \perp v_2$.

2.3.4 نظرية

ليكن $(E,\circ)$ فضاءاً اقليدياً . لكل $v_1, v_2 \in E$ ، إذا كان $v_1 \perp v_2$ فأن : $\|v_1+v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$

البرهان :

$$\|v_1+v_2\|^2 = (v_1+v_2)\circ(v_1+v_2)$$
$$= (v_1\circ v_1) + (v_1\circ v_2) + (v_2\circ v_1) + (v_2\circ v_2)$$

لكن $v_1 \circ v_2 = 0$ ، $v_2 \circ v_1 = 0$ فأن :

$$\|v_1+v_2\|^2 = v_1\circ v_1 + v_2\circ v_2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$$

(و.هـ.م.)

ويمكن تعميم النظرية السابقة كمايلي :

لكل $v_1, \ldots, v_n \in E$ ، إذا كانت الاشعة $v_1, \ldots, v_n$ متعامدة أزواجاً فأن :

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} v_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2$$

3.3.4 تعريف

ليكن $(E,\circ)$ فضاءاً اقليدياً . لكل $v_1, v_2 \in E$ نعرف البعد بين الشعاعين v_1 ، v_2 بأنه العدد الحقيقي $\|v_1 - v_2\|$ ونرمز له بالرمز $d(v_1, v_2)$.

نلاحظ انه لكل $v \in E$ فأن $d(v,v)=0$.

وكذلك لكل $v_1, v_2 \in E$ فأن $v_1 \neq v_2 \iff d(v_1,v_2)>0$

وكذلك : $d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\| = |-1| \|v_2 - v_1\| = d(v_2, v_1)$

وأخيراً لكل $v_1, v_2, v_3 \in E$ فأن :

$$d(v_1, v_2) + d(v_2, v_3) = \|v_1 - v_2\| + \|v_2 - v_3\|$$
$$\geqslant \|v_1 - v_2 + v_2 - v_3\| = \|v_1 - v_3\| = d(v_1, v_3)$$

أي أن :

$$d(v_1, v_3) \leq d(v_1, v_2) + d(v_2, v_3)$$

4.3.4 تعريف

ليكن $(E, \circ)$ فضاءاً اقليدياً ، $(E_1, \circ)$ فضاءاً أقليدياً جزئياً من E . نقول ان الشعاع $v \in E$ عمودي على الفضاء الاقليدي الجزئي E_1 اذا كان v عمودياً على جميع اشعة E_1 . اي انه لكل $u \in E_1$ ، $v \circ u = 0$ ونكتب $v \perp E_1$. نسمي المجموعة $\{v \in E ; v \perp E_1\}$ المكملة العمودية للفضاء الأقليدي الجزئي E_1 ونرمز لها بالرمز $E_1^{\perp}$.

نقول ان الفضاءان الأقليديان الجزئيان E_1 ، E_2 من الفضاء الأقليدي E هما متعامدان اذا كان لكل $v_1 \in E_1$ و لكل $v_2 \in E_2$ ، $v_1 \circ v_2 = 0$ ونكتب عندئذ $E_1 \perp E_2$.

5.3.4 نظرية

ليكن $(E, \circ)$ فضاءاً اقليدياً ، E_1 فضاءاً اقليدياً جزئياً من E . فأن $E_1^{\perp}$ هو فضاء اقليدي جزئي من E .

البرهان :

لكل $v_1 , v_2 \in E_1^{\perp}$ ولكل $x \in E_1$ فأن :

$$(v_1 - v_2) \circ x = v_1 \circ x + (-v_2) \circ x$$
$$= v_1 \circ x + (-1)(v_2 \circ x)$$
$$= 0 + 0 = 0$$

فأن $v_1 - v_2 \in E_1^{\perp}$

لكل $\lambda \in \mathbb{R}$ يكون : $\lambda v_1 \circ x = \lambda(v_1 \circ x) = \lambda . 0 = 0$

ومنه $\lambda v_1 \in E_1^{\perp}$.

بهذا فأن $E_1^{\perp}$ هو فضاء أقليدي جزئي من E .

(و. هـ. م.)

6.3.4 نظرية

ليكن $(E, \circ)$ فضاءً أقليدياً و E_1 فضاءً أقليدياً جزئياً من E . ولتكن $\{v_1, \ldots, v_n\}$ اساساً للفضاء E_1 فأنه لكل $x \in E$ ،

$x \perp E_1 \iff x \circ v_i = 0$ لكل $i = 1, \ldots, n$

البرهان :

لنفرض ان $x \perp E_1$ فأنه من التعريف لكل $v \in E_1$ $x \circ v = 0$ ، وبذلك فأنه لكل $i = 1, \ldots, n$, $x \circ v_i = 0$.

لنفرض الآن انه لكل $i = 1, \ldots, n$ فأن $x \circ v_i = 0$.

فأنه لكل $y \in E_1$ ، $y = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ حيث $\lambda_i \in \mathbb{R}$

فأن : $x \circ y = x \circ (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 (x \circ v_1) + \cdots + \lambda_n (x \circ v_n)$

$$= 0 + \cdots + 0 = 0$$

فأن $x \perp E_1$ (و. هـ. م.)

4.4 الأســاســ المعياري المتعامد

1.4.4 تعريف

ليكن $(E,\circ)$ فضاءً اقليدياً ذا بعد n .
نقول ان الاســاس $\{w_1,\dots,w_n\}$ هو اســاس متعامد للفضاء الأقليدي E إذا كان كل زوج من هذه الاشعة متعامداً ، اي انه لكل $i\neq j$ فأن $w_i \circ w_j = 0$. ونقول ان الاســاس $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ هو اســاس معياري متعامد إذا كان كل زوج من هذه الاشعة متعامداً وطول كل شعاع هو 1 . اي انه :

$$\varepsilon_i \circ \varepsilon_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

2.4.4 نظرية

ليكن $(E,\circ)$ فضاءً اقليدياً ذا بعد n ،
ولتكن $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ أشعة من E بحيث ان :

$$\varepsilon_i \circ \varepsilon_j = 0 \quad \text{عندما} \quad i\neq j$$

$$\text{و} \quad \varepsilon_i \circ \varepsilon_i = \|\varepsilon_i\|^2 = 1 \quad \text{لكل} \quad i=1,\dots,n$$

فأن المجموعة $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ هي اســاس معياري متعامد للفضاء الأقليدي E .

البرهان :

بما ان $\dim E = n$ وعدد الأشعة $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ هو n فيكفي ان نبرهن ان هذه الاشعة مستقلة خطياً .

لأي $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ وإذا كان $\lambda_1\varepsilon_1+\dots+\lambda_i\varepsilon_i+\dots+\lambda_n\varepsilon_n=0$
فأنه لكل $i=1,\dots,n$.

$$(\lambda_1\varepsilon_1+\dots+\lambda_i\varepsilon_i+\dots+\lambda_n\varepsilon_n)\circ\varepsilon_i = 0$$

من هنا فأن :

$$\lambda_1(\varepsilon_1\circ\varepsilon_i)+\dots+\lambda_i(\varepsilon_i\circ\varepsilon_i)+\dots+\lambda_n(\varepsilon_n\circ\varepsilon_i) = 0$$

أي أن :

$$\lambda_1\cdot 0+\dots+\lambda_i\cdot 1+0+\dots+0=0$$

ومنه فأن $\lambda_i=0$ لكل $i=1,\dots,n$.

اي ان الاشعة $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ مستقلة خطياً .

وبذلك فأن $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ هي اساس معياري متعامد للفضاء الأقليدي E .

(و . هـ . م .)

3.4.4 نظرية

ليكن $(E,\circ)$ فضاءاً اقليدياً ذا بعد n ،
ولتكن $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ اساساً معيارياً متعامداً في E ،
فأنه لكل $x,y\in E$ وإذا كان : $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varepsilon_i$ ، $y=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\varepsilon_i$
حيث $\mu_i,\lambda_i\in\mathbb{R}$ فأن :

$$x\circ y=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot\mu_i$$

البرهان :

$$x\circ y=(\lambda_1\varepsilon_1+\dots+\lambda_n\varepsilon_n)\circ(\mu_1\varepsilon_1+\dots+\mu_n\varepsilon_n)$$

$$=\lambda_1\mu_1(\varepsilon_1\circ\varepsilon_1)+\dots+\lambda_1\mu_n(\varepsilon_1\circ\varepsilon_n)+\dots+\lambda_n\mu_1(\varepsilon_n\circ\varepsilon_1)+\dots+\lambda_n\mu_n(\varepsilon_n\circ\varepsilon_n)$$

$$=\lambda_1\mu_1+\dots+\lambda_n\mu_n = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i$$

(و . هـ . م .)

4.4.4 طريقة كرام شمت للحصول على اساس متعامد

ليكن $(E,\circ)$ فضاءاً أقليدياً ذا بعد n ،
ولتكن $\{v_1,\dots,v_n\}$ اساساً في E .
تعتمد طريقة كرام شمت على الاختيار التالي:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = a_{21} w_1 + v_2$$

$$- - - - - - - - - - - - .$$

$$w_i = a_{i1} w_1 + a_{i2} w_2 + \cdots + a_{ii-1} w_{i-1} + v_i$$

$$- .$$

$$w_n = a_{n1} w_1 + a_{n2} w_2 + \cdots + a_{nn-1} w_{n-1} + v_n$$

حيث نوجد $a_{ij} \in IR$ بحيث تكون الاشعة $w_1,\dots,w_n$
متعامدة فيما بينها ازواجاً ازواجاً .
لكي تكون w_1 , w_2 متعامدين ، فأنه يجب ان يتحقق
الشرط : $w_1 \circ w_2 = 0$

اي انه : $w_1 \circ (a_{21} w_1 + v_2) = 0$

فأن : $a_{21} (w_1 \circ w_1) + w_1 \circ v_2 = 0$

أي أن : $a_{21} = - \dfrac{w_1 \circ v_2}{w_1 \circ w_1} = - \dfrac{w_1 \circ v_2}{\| w_1 \|^2}$

حيث w_1 ، v_2 معروفين فنجد a_{21} . وهكذا نجد w_2
عمودي على w_1 .
وهكذا نستمر ونجد الاشعة $w_1,\dots,w_{i-1}$ متعامدة فيما
بينها . لشكل عام لأيجاد الشعاع w_i والمتعامد على
جميع الاشعة $w_1,\dots,w_{i-1}$ فأنه :

وحقق $\omega_i = a_{i1}\omega_1 + a_{i2}\omega_2 + \cdots + a_{ii-1}\omega_{i-1} + v_i$

$\omega_i \circ \omega_j = 0$ لكل $j = 1, \ldots, i-1$.

$$(a_{i1}\omega_1 + a_{i2}\omega_2 + \cdots + a_{ii-1}\omega_{i-1} + v_i) \circ \omega_1 = 0$$

$$(a_{i1}\omega_1 + a_{i2}\omega_2 + \cdots + a_{ii-1}\omega_{i-1} + v_i) \circ \omega_2 = 0$$

- -

$$(a_{i1}\omega_1 + a_{i2}\omega_2 + \cdots + a_{ii-1}\omega_{i-1} + v_i) \circ \omega_{i-1} = 0$$

بما ان الاشعة $\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}$ متعامدة فيما بينها

ازواجاً فأن :

$$a_{i1}(\omega_1 \circ \omega_1) + v_i \circ \omega_1 = 0$$

$$a_{i2}(\omega_2 \circ \omega_2) + v_i \circ \omega_2 = 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - -

$$a_{ii-1}(\omega_{i-1} \circ \omega_{i-1}) + v_i \circ \omega_{i-1} = 0$$

اي ان :

$$a_{i1} = -\frac{v_i \circ \omega_1}{\omega_1 \circ \omega_1} = -\frac{v_i \circ \omega_1}{\|\omega_1\|^2}$$

$$a_{i2} = -\frac{v_i \circ \omega_2}{\omega_2 \circ \omega_2} = -\frac{v_i \circ \omega_2}{\|\omega_2\|^2}$$

- -

$$a_{ii-1} = -\frac{v_i \circ \omega_{i-1}}{\omega_{i-1} \circ \omega_{i-1}} = -\frac{v_i \circ \omega_{i-1}}{\|\omega_{i-1}\|^2}$$

وهكذا فأن الشعاع ω_n والعمودي على بقية الأشعة

$\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$. يكون $\omega_n = a_{n1}\omega_1 + a_{n2}\omega_2 + \cdots + a_{nn-1}\omega_{n-1} + v_n$

حيث $a_{n1} = -\frac{v_n \circ \omega_1}{\|\omega_1\|^2}, \ldots, a_{nn-1} = -\frac{v_n \circ \omega_{n-1}}{\|\omega_{n-1}\|^2}$

نبرهن ان الاشعة $\omega_1, \ldots, \omega_n$ مستقلة خطياً .

لأي $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ إذا كان : $\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \ldots + \lambda_{n-1}\omega_{n-1} + \lambda_n\omega_n = 0$.

لكن

$$\omega_1 = v_1$$

$$\omega_2 = a_{21}\omega_1 + v_2 = b_{21}v_1 + v_2$$

$$\omega_3 = a_{31}\omega_1 + a_{32}\omega_2 + v_3 = a_{31}v_1 + a_{32}(b_{21}v_1 + v_2) + v_3$$

$$= b_{31}v_1 + b_{32}v_2 + v_3$$

- -

$$\omega_{n-1} = b_{(n-1)1}v_1 + b_{(n-1)2}v_2 + \cdots + b_{(n-1)(n-2)}v_{n-2} + v_{n-1}$$

$$\omega_n = b_{n1}v_1 + b_{n2}v_2 + \cdots + b_{n(n-1)}v_{n-1} + v_n$$

فأن :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2(b_{21}v_1 + v_2) + \lambda_3(b_{31}v_1 + b_{32}v_2 + v_3) + \cdots + \lambda_{n-1}(b_{(n-1)1}v_1 + b_{(n-1)2}v_2 + \cdots$$

$$\cdots + b_{(n-1)(n-2)}v_{n-2} + v_{n-1}) + \lambda_n(b_{n1}v_1 + b_{n2}v_2 + \cdots + b_{n(n-1)}v_{n-1} + v_n) = 0$$

فأن :

$$(\lambda_1 + \lambda_2 b_{21} + \lambda_3 b_{31} + \cdots + \lambda_{n-1}b_{(n-1)1} + \lambda_n b_{n1})v_1 + (\lambda_2 + \lambda_3 b_{32} + \cdots + \lambda_{n-1}b_{(n-1)2} + \lambda_n b_{n2})v_2$$

$$+ \cdots + (\lambda_{(n-1)} + \lambda_n b_{n(n-1)})v_{n-1} + \lambda_n v_n = 0$$

بما أن الاشعة $v_1, \ldots, v_n$ مستقلة خطياً ، فأن $\lambda_n = 0$

وكذلك $\lambda_{n-1} + \lambda_n b_{n(n-1)} = 0$ فأن $\lambda_{n-1} = 0$ وهكذا .... فأن :

$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$. اي ان الاشعة $\omega_1, \ldots, \omega_n$ مستقلة خطياً .

وبذلك فأن $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ هو اساس متعامد للفضاء الاقليدي E .

فاذا وضعنا $\varepsilon_i = \frac{\omega_i}{\|\omega_i\|}$ لكل $i = 1, \ldots, n$ فأن : $\|\varepsilon_i\| = 1$ لكل

$i = 1, \ldots, n$. لذلك فأننا نحصل على اساس معياري متعامد

$\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ للفضاء الاقليدي انطلاقاً من الاساس $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

مثال 5.4.4

ليكن $(E_1, \circ)$ فضاءً أقليدياً جزئياً من الفضاء الأقليدي $\mathbb{R}^4$ على الحقل $\mathbb{R}$. ولتكن :

$$\{ v_1 = (1,2,2,-1) \;,\; v_2 = (1,1,-5,3) \;,\; v_3 = (3,2,8,-7) \}$$

اساساً للفضاء E_1 . لنبحث عن الاساس المتعامد $\{w_1, w_2, w_3\}$ للفضاء الأقليدي E_1 ، فأن :

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = a_{21} w_1 + v_2$$

$$w_3 = a_{31} w_1 + a_{32} w_2 + v_3$$

وكذلك :

$$a_{21} = -\frac{v_2 \circ w_1}{\|w_1\|^2} \;,\; a_{31} = -\frac{v_3 \circ w_1}{\|w_1\|^2} \;,\; a_{32} = -\frac{v_3 \circ w_2}{\|w_2\|^2}$$

فأن : $w_1 = (1,2,2,-1)$.

$$a_{21} = -\frac{(1,1,-5,3)\circ(1,2,2,-1)}{\|(1,2,2,-1)\|^2} = \frac{-1-2+10+3}{1+4+4+1} = \frac{10}{10} = 1$$

اي ان :

$$w_2 = 1 \cdot w_1 + v_2 = (1,2,2,-1) + (1,1,-5,3) = (2,3,-3,2)$$

$$a_{31} = -\frac{(3,2,8,-7)\circ(1,2,2,-1)}{\|(1,2,2,-1)\|^2} = \frac{-30}{10} = -3$$

$$a_{32} = -\frac{(3,2,8,-7)\circ(2,3,-3,2)}{\|(2,3,-3,2)\|^2} = \frac{26}{26} = 1$$

فأن :

$$w_3 = -3(1,2,2,-1) + (2,3,-3,2) + (3,2,8,-7) = (2,-1,-1,-2)$$

واضح ان الاشعة w_1, w_2, w_3 مستقلة خطياً ، وبذلك نستنتج

ان $\{w_1, w_2, w_3\}$ هي اساس للفضاء E_1 .
وكذلك

$$w_1 \circ w_2 = (1,2,2,-1) \circ (2,3,-3,2) = 2+6-6-2 = 0$$

$$w_1 \circ w_3 = (1,2,2,-1) \circ (2,-1,-1,-2) = 2-2-2+2 = 0$$

$$w_2 \circ w_3 = (2,3,-3,2) \circ (2,-1,-1,-2) = 4-3+3-4 = 0$$

اي ان الاشعة $\{w_1, w_2, w_3\}$ هي اساس متعامد للفضاء E_1 .
من هنا فأن :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{(-1,2,2,-1)}{\sqrt{10}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{(2,3,-3,2)}{\sqrt{26}} = \left(\frac{2}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{-3}{\sqrt{26}}, \frac{2}{\sqrt{26}}\right)$$

$$\mathcal{E}_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{(2,-1,-1,-2)}{\sqrt{10}} = \left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{-2}{\sqrt{10}}\right)$$

ونلاحظ ان :

$$\|\mathcal{E}_1\| = \sqrt{\mathcal{E}_1 \circ \mathcal{E}_1} = \sqrt{\frac{1}{10}+\frac{4}{10}+\frac{4}{10}+\frac{1}{10}} = 1$$

$$\|\mathcal{E}_2\| = \sqrt{\mathcal{E}_2 \circ \mathcal{E}_2} = \sqrt{\frac{4}{26}+\frac{9}{26}+\frac{9}{26}+\frac{4}{26}} = 1$$

$$\|\mathcal{E}_3\| = \sqrt{\mathcal{E}_3 \circ \mathcal{E}_3} = \sqrt{\frac{4}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{4}{10}} = 1$$

لذلك فأننا حصلنا على الاشعة $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ وهي اساس معياري متعامد للفضاء الاقليدي E_1 انطلاقاً من الاساس $\{v_1, v_2, v_3\}$.

6.4.4 نظرية

ليكن $(E, \circ)$ فضاءاً اقليدياً ذا بعد n ، وليكن

E_1 فضاءاً أقليدياً جزئياً ذا بعد k من الفضاء E.
فأنه يوجد في الفضاء E اساس معياري متعامد
$\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ بحيث ان $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in E_1$ اساس للفضاء E_1
و $\varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n \in E_1^{\perp}$.

البرهان :

لتكن $\{v_1, \dots, v_k\}$ اساساً في E_1 فأنه
حسب (7.5.1) يمكن تكملة هذا الاساس الى
اساس للفضاء E . لتكن $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ اساساً
للفضاء E . من هذا الاساس يمكننا الحصول على
اساس متعامد $\{w_1, \dots, w_n\}$ كمايلي :

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = a_{21} w_1 + v_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$w_k = a_{k1} w_1 + a_{k2} w_2 + \dots + a_{kk-1} w_{k-1} + v_k$$

$$\dots\dots\dots$$

$$w_n = a_{n1} w_1 + a_{n2} w_2 + \dots + a_{nn-1} w_{n-1} + v_n$$

بما ان $v_1, \dots, v_k \in E_1$ فأن $w_1, \dots, w_k \in E_1$.
الاشعة $\varepsilon_i = \dfrac{w_i}{\|w_i\|}$ لكل $i = 1, \dots, n$ ، هي
اشعة معيارية متعامدة وعددها n ، فأنها عبارة
عن اساس معياري متعامد للفضاء E .
كذلك نلاحظ ان الاشعة $\varepsilon_i \in E_1$ لكل $i = 1, \dots, k$.
فأن هذه الاشعة اساس معياري متعامد للفضاء E_1 .

وكذلك $\varepsilon_i \circ \varepsilon_{k+j} = 0$ لكل $j=1,\dots,n-k$ ، ولكل $i=1,\dots,k$

فأن الأشعة

$$\varepsilon_{k+1},\dots,\varepsilon_n \in E_1^{\perp} \ .$$

(و.هـ.م.)

نظرية 7.4.4

ليكن $(E,\circ)$ فضاءً اقليدياً ذا بعد n ، وليكن E_1 فضاءً اقليدياً جزئياً من E ، فأن : $E = E_1 \oplus E_1^{\perp}$

البرهان :

إذا كان E_1 بعده k مثلاً فأنه حسب (6.4.4) يوجد اساس معياري متعامد $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ للفضاء E بحيث أن $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k$ اساس للفضاء E_1 و $\varepsilon_{k+1},\dots,\varepsilon_n \in E_1^{\perp}$. لكل $x \in E$ فأن $x = \lambda_1\varepsilon_1 + \dots + \lambda_n\varepsilon_n$ حيث $\lambda_i \in \mathbb{R}$. وكذلك $\lambda_1\varepsilon_1 + \dots + \lambda_k\varepsilon_k \in E_1$ و $\lambda_{k+1}\varepsilon_{k+1} + \dots + \lambda_n\varepsilon_n \in E_1^{\perp}$ بذلك فأنه لكل $x \in E$ فأن $x = a + b$ حيث $a \in E_1$ ، $b \in E_1^{\perp}$ ومنه $E \subseteq E_1 + E_1^{\perp}$. وبما أن $E_1 + E_1^{\perp} \subseteq E$ فأن $E = E_1 + E_1^{\perp}$. لكل $x \in E_1 \cap E_1^{\perp}$ فأن $x \in E_1$ و $x \in E_1^{\perp}$. اي ان $x \circ x = 0$ وهذا غير ممكن لأنه $\varepsilon_i \circ \varepsilon_i = 1$ لكل $i = 1,\dots,n$ وبذلك فأن $E_1 \cap E_1^{\perp} = \{0\}$ اي ان $E = E_1 \oplus E_1^{\perp}$.

(و. هـ.م.)

من النظرية السابقة ومن النظرية (10.5.1) ينتج مباشرة النتيجة التالية .

8.4.4 نتيجة

ليكن $(E,\circ)$ فضاءً أقليدياً ، E_1 فضاءً أقليدياً جزئياً من E ، فأن : $\dim E = \dim E_1 + \dim E_1^{\perp}$.

5.4 التطبيقات العمودية والمصفوفات المتعامدة

1.5.4 تعريف

ليكن $(E_1,\circ)$ ، $(E_2,\acute{\circ})$ فضاءين أقليديين ،
وليكن $f\in L(E_1,E_2)$. نقول ان f تطبيق عمودي إذا
كان لكل $v,u\in E_1$ ، $f(v)\,\acute{\circ}\,f(u) = v\circ u$
نلاحظ من هذا التعريف مباشرة انه إذا كان $v=u$ فأن:

$$f(v)\,\acute{\circ}\,f(v) = v\circ v$$

أي أن: $\|f(v)\|^2 = \|v\|^2$

2.5.4 مثال

ليكن $E_1=E_2=\mathbb{R}^2$ فضاءً اقليدياً على الحقل $\mathbb{R}$.
لكل $v,u\in\mathbb{R}^2$ حيث $v=(v_1,v_2)$ ، $u=(u_1,u_2)$ فأن
$v\circ u = v_1u_1 + v_2u_2$ لاحظ المثال $(3.2.4)$.
ليكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ تطبيقاً معرفاً كمايلي :

$$\forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \;,\; f(x_1,x_2) = (-x_1,x_2)$$

فأن f تطبيق عمودي لأنه :

$$f(v)\circ f(u) = f(v_1,v_2)\circ f(u_1,u_2) = (-v_1,v_2)\circ(-u_1,u_2)$$

$$= v_1 u_1 + v_2 u_2 = (v_1, v_2) \circ (u_1 \circ u_2) = v \circ u$$

3.5.4 نظرية

ليكن $(E, \circ)$ فضاءً اقليدياً . ولتكن $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ أشعة معيارية متعامدة في E ، وليكن $f : E \to E$ تطبيقاً عمودياً، فأن مجموعة الاشعة $f(\varepsilon_1), \dots, f(\varepsilon_n)$ هي مجموعة معيارية متعامدة .

البرهان :

لكل $i, j = 1, \dots, n$ بحيث $i \neq j$ فأن :

$$f(\varepsilon_i) \circ f(\varepsilon_j) = \varepsilon_i \circ \varepsilon_j = 0$$

اي ان الاشعة $f(\varepsilon_1), \dots, f(\varepsilon_n)$ متعامدة .

بما انه لكل $i = 1, \dots, n$. فأن : $\|\varepsilon_i\|^2 = 1$ ، لذلك فأن :

$$\|f(\varepsilon_i)\|^2 = \|\varepsilon_i\|^2 = 1$$

ومنه نستنتج ان مجموعة الاشعة $f(\varepsilon_1), \dots, f(\varepsilon_n)$ مجموعة معيارية متعامدة .

(و . هـ . م .)

4.5.4 تعريف

لتكن $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. نقول ان المصفوفة A هي مصفوفة متعامدة اذا وفقط اذا كانت اشعة اعمدة المصفوفة A مجموعة معيارية متعامدة .

فأذا رمزنا لأعمدة المصفوفة A بالرمز $C_1, \dots, C_n$ فأن

A متعامدة $\iff C_i \circ C_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ لكل $i, j = 1, \dots, n$.

5.5.4 نظرية

$A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متعامدة $\Leftrightarrow A^TA=I_n$.

البرهان :

لتكن

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

، ولتكن c_i اشعة اعمدة المصفوفة A ، فأن :

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

فأنه لكل $i,j=1,\dots,n$ إذا كان $c_i\circ c_j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$ فأن:

$$A^TA=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}=I_n$$

وبالعكس إذا كانت : $A^TA=I_n$ فأن $c_i\circ c_j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$
لكل $i,j=1,\dots,n$.

فأن اشعة اعمدة المصفوفة A مجموعة معيارية متعامدة ومنه المصفوفة A هي مصفوفة متعامدة.

(و . هـ . م .)

لنلاحظ هنا، انه إذا كانت A مصفوفة متعامدة ، فأن اشعة اعمدة A مستقلة خطياً ، ومنه فأن التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A تقابل ، ومنه نستنتج إذا كانت A مصفوفة متعامدة فأن A عكوس .

6.5.4 نظرية

(1) المصفوفة الحيادية هي مصفوفة متعامدة .

(2) لكل $A \in M_n(\mathbb{R})$ فأن A مصفوفة متعامدة $\Leftrightarrow A^T = A^{-1}$

(3) حاصل ضرب مصفوفتين متعامدتين هي مصفوفة متعامدة .

(4) محدد المصفوفة المتعامدة يساوي ± 1 .

(5) المصفوفة المعكوسة للمصفوفة المتعامدة هي مصفوفة متعامدة .

البرهان :

(1) إذا كانت $I_n \in M_n(\mathbb{R})$ ، فأنه من الواضح ان :
$I_n^T I_n = I_n$ ومنه I_n مصفوفة متعامدة .

(2) إذا كانت A مصفوفة متعامدة فأنه حسب $(5.5.4)$ $A^T A = I_n$ فأن $A^T = A^{-1}$.

وبالعكس إذا كانت $A^T = A^{-1}$ فأن : $A^T A = A^{-1} A = I_n$
ومنه A مصفوفة متعامدة .

(3) لنفرض ان $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفتين متعامدتين فأنه حسب (2) فأن $A^T = A^{-1}$ ، $B^T = B^{-1}$.

ومنه : $(AB)^T = B^T A^T = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$

فأنه حسب (2) تكون AB مصفوفة متعامدة .

(4) لتكن $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متعامدة ، عندئذ $A^T . A = I_n$. من هنا فأن :

$$\det(A)^2 = \det(A) . \det(A) = \det(A^T) . \det A = \det(A^T A)$$
$$= \det(I_n) = 1$$

فأن $\det(A) = \pm 1$

(5) لتكن المصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متعامدة فأن $A^T = A^{-1}$. ولتكن $A^{-1} = C$ نبرهن ان C متعامدة نلاحظ ان : $C^{-1} = (A^{-1})^{-1} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = C^T$

بهذا نستنتج ان C مصفوفة متعامدة.

(و.هـ.م.)

7.5.4 نظرية

ليكن $(E_1, \circ)$ ، $(E_2, \circ')$ فضاءين اقليديين ذوي بعدين n . ولتكن $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ اساساً معيارياً متعامداً في E_1 ، $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ اساساً معيارياً متعامداً في E_2 . وليكن $f \in L(E_1, E_2)$. فأن f ليكون تطبيقاً عمودياً $\Longleftrightarrow$ المصفوفة المرافقة للتطبيق f بالنسبة للاساسين المذكورين مصفوفة متعامدة .

البرهان :

لتكن $A = (a_{ij}) = M(f)$ المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f بالنسبة للأساس $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ في E_1 والاساس $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ في E_2 . لنرمز لأعمدة هذه المصفوفة بـ $c_1, \ldots, c_n$ لنفرض ان $\circ''$ هو الضرب السلمي في $\mathbb{R}^n$. فأن لكل i, j :

$$f(\varepsilon_i) = a_{1i}\beta_1 + \cdots + a_{ni}\beta_n$$

$$f(\varepsilon_j) = a_{1j}\beta_1 + \cdots + a_{nj}\beta_n$$

فأن :
$$f(\varepsilon_i) \circ' f(\varepsilon_j) = \left(\sum_{p=1}^{n} a_{pi}\beta_p\right) \circ' \left(\sum_{q=1}^{n} a_{qj}\beta_q\right)$$

$$= \sum_{p,q=1}^{n} a_{pi}\, a_{qj}\, (\beta_p \,o'\, \beta_q) = \sum_{p=1}^{n} a_{pi}\, a_{pj}\, (\beta_p \,o'\, \beta_p)$$

$$= \sum_{p=1}^{n} a_{pi}\, a_{pj}$$

وكذلك :

$$c_i \,o''\, c_j = (a_{1i}, \dots, a_{ni}) \,o''\, (a_{1j}, \dots, a_{nj}) = \sum_{p=1}^{n} a_{pi}\, a_{pj}$$

اي ان :

$$f(\varepsilon_i) \,o'\, f(\varepsilon_j) = c_i \,o''\, c_j$$

فاذا كان f تطبيقاً عمودياً فانه لكل $i, j = 1, \dots, n$:

$$c_i \,o''\, c_j = f(\varepsilon_i) \,o'\, f(\varepsilon_j) = \varepsilon_i \,o\, \varepsilon_j = \begin{cases} 1 & \text{عندما } i=j \\ 0 & \text{عندما } i \neq j \end{cases}$$

وبذلك نستنتج ان المجموعة $c_1, \dots, c_n$ هي مجموعة معيارية متعامدة . اي ان اعمدة المصفوفة A هي مجموعة معيارية متعامدة ، ومنه فان المصفوفة A هي مصفوفة متعامدة. وبالعكس اذا كانت A مصفوفة متعامدة ، فان المجموعة $c_1, \dots, c_n$ مجموعة معيارية متعامدة . بما ان الاشعة $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ مجموعة معيارية متعامدة ، فانه لكل $i, j = 1, \dots, n$

اذا كان $i \neq j$ فان : $c_i \,o''\, c_j = 0 = \varepsilon_i \,o\, \varepsilon_j$

اذا كان $i = j$ فان : $c_i \,o''\, c_j = 1 = \varepsilon_i \,o\, \varepsilon_j$

من هنا فانه لكل $x, y \in E_1$ حيث $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i$ ، $y = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \varepsilon_j$

$$f(x) \,o'\, f(y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i\right) o'\, f\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \varepsilon_j\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \gamma_j \left(f(\varepsilon_i) \circ' f(\varepsilon_j) \right) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \gamma_j \left(c_i \circ'' c_j \right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \gamma_j \left(\varepsilon_i \circ \varepsilon_j \right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i \right) \circ \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \varepsilon_j \right) = x \circ y$$

بهذا نستنتج ان f عمودي

(و . هـ . م)

8 . 5 . 4 تعريف

ليكن $(E_1, \circ)$ ، $(E_2, \circ')$ فضاءين أقليديين وليكن $f \in L(E_1, E_2)$. نسمي التطبيق $f^* : E_2 \to E_1$ بالتطبيق الثنوي للتطبيق f إذا وفقط إذا كان لكل $v \in E_1$ ولكل $u \in E_2$ ،

$$f(v) \circ' u = v \circ f^*(u)$$

إذا كان $f : E_1 \to E_1$ عندئذ نقول ان التطبيق f هو التطبيق الثنوي لنفسه إذا كان $f = f^*$ ، اي انه لكل $v, u \in E_1$ فأن : $f(v) \circ u = v \circ f(u)$.

9 . 5 . 4 نظرية

ليكن $(E_1, \circ)$ ، $(E_2, \circ')$ فضاءين اقليديين ذي بعدين n ، m على التوالي . وليكن $f \in L(E_1, E_2)$ فأنه يوجد f^* وحيد من E_2 في E_1 بحيث أنه لكل $v \in E_1$ ولكل

$u \in E_2$ فأن : $f(v) \circ u = v \circ f^*(u)$.

البرهان :

لتكن $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ اساساً معيارياً متعامداً للفضاء E_1

$\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$، اساساً معيارياً متعامداً للفضاء E_2 .

وليكن $f : E_1 \to E_2$ تطبيقاً خطياً ، فأنه لكل $v \in E_1$

$v = \lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n$ حيث $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. ولتكن $A = (a_{ij})$

المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f بالنسبة للأساسين

المذكورين . فأن :

$$f(v) = f(\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n) = \lambda_1 f(\varepsilon_1) + \dots + \lambda_n f(\varepsilon_n)$$

وأن :

$$f(v) = (\lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_n a_{1n})\beta_1 + \dots + (\lambda_1 a_{m1} + \dots + \lambda_n a_{mn})\beta_m$$

ليكن $f^* : E_2 \to E_1$ معرفاً كما يلي :

$$\forall u = \gamma_1 \beta_1 + \dots + \gamma_m \beta_m \in E_2 \ , \quad \gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{R}$$

$$f^*(u) = f^*(\gamma_1 \beta_1 + \dots + \gamma_m \beta_m) = (a_{11}\gamma_1 + \dots + a_{m1}\gamma_m)\varepsilon_1 + \dots$$

$$\dots + (a_{1n}\gamma_1 + \dots + a_{mn}\gamma_m)\varepsilon_n$$

واضح ان f^* تطبيق . نبرهن ان f^* خطي .

لكل $v, u \in E_2$ حيث $v = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_m \beta_m$ ، $u = \gamma_1 \beta_1 + \dots + \gamma_m \beta_m$

و $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{R}$ ، $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ فأن :

$$f^*(u+v) = f^*((\gamma_1 + \alpha_1)\beta_1 + \dots + (\gamma_m + \alpha_m)\beta_m)$$

$$= (a_{11}(\gamma_1 + \alpha_1) + \dots + a_{m1}(\gamma_m + \alpha_m))\varepsilon_1 + \dots + (a_{1n}(\gamma_1 + \alpha_1) + \dots + a_{mn}(\gamma_m + \alpha_m))\varepsilon_n$$

$$= f^*(u) + f^*(v)$$

وكذلك لكل $\lambda \in \mathbb{R}$ فأن :

$$f^*(\lambda u) = f^*(\lambda \gamma_1 \beta_1 + \cdots + \lambda \gamma_m \beta_m) = (a_{11}\lambda \gamma_1 + \cdots + a_{m1}\lambda \gamma_m)\varepsilon_1 +$$
$$+ \cdots + (a_{1n}\lambda \gamma_1 + \cdots + a_{mn}\lambda \gamma_m)\varepsilon_n$$
$$= \lambda f^*(u)$$

بهذا فأن f^* خطي ، والمصفوفة المرافقة له هي A^T .

لكل $x = \lambda_1 \varepsilon_1 + \cdots + \lambda_n \varepsilon_n \in E_1$ بما ان $\beta_1, \ldots, \beta_m$ اشعة معيارية متعامدة ، و $f(x) = \lambda_1 f(\varepsilon_1) + \cdots + \lambda_n f(\varepsilon_n)$ فأنه لكل $k = 1, \ldots, m$ فأن :

$$f(x) \circ' \beta_k = \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i} \lambda_i \right) \beta_1 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{mi} \lambda_i \right) \beta_m \right) \circ' \beta_k$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \lambda_i (\beta_k \circ' \beta_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \lambda_i$$

ومن جهة اخرى بما ان :

$$f^*(\beta_k) = a_{k1}\varepsilon_1 + \cdots + a_{kn}\varepsilon_n$$

لكل $k = 1, \ldots, m$ فأن :

$$x \circ f^*(\beta_k) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i \right) \circ (a_{k1}\varepsilon_1 + \cdots + a_{kn}\varepsilon_n)$$

$$= \lambda_1 a_{k1} (\varepsilon_1 \circ \varepsilon_1) + \cdots + \lambda_n a_{kn} (\varepsilon_n \circ \varepsilon_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ki}$$

فأنه كذلك :

$$f(x) \circ' \beta_k = x \circ f^*(\beta_k) \quad , \quad k = 1, \ldots, m \text{ لكل}$$

وبذلك فأنه لكل $y = \gamma_1 \beta_1 + \cdots + \gamma_m \beta_m \in E_2$ يكون :

$$f(x) \circ' y = f(x) \circ' \left(\sum_{k=1}^{m} \gamma_k \beta_k \right) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k (f(x) \circ' \beta_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \gamma_k (x \circ f^*(\beta_k)) = x \circ \sum_{k=1}^{m} \gamma_k f^*(\beta_k)$$

$$= x \circ f^*(\sum_{k=1}^{m} \gamma_k \beta_k) = x \circ f^*(y)$$

بهذا نستنتج ان f^* هو التطبيق الثنوي للتطبيق f.

اذا كان f_1^* تطبيقاً ثنوياً اخر للتطبيق f ، فانه لكل $y \in E_2$ ، نضع $x = (f_1^* - f^*)(y)$ حيث $x \in E_1$ فان:

$$f(x) \circ' y = x \circ f_1^*(y)$$

وكذلك

$$f(x) \circ' y = x \circ f^*(y)$$

من هنا فان :

$$0 = (x \circ f_1^*(y)) - (x \circ f^*(y)) = x \circ (f_1^* - f^*)(y)$$

وبذلك فان :

$$(f_1^* - f^*)(y) \circ (f_1^* - f^*)(y) = 0$$

اي ان :

$$(f_1^* - f^*)(y) = 0$$

وبهذا فان $f_1^*(y) = f^*(y)$ لكل $y \in E_2$.

فان $f_1^* = f^*$.

(و. هـ. م.)

4 . 5 . 10 نظرية

ليكن $(E_1, \circ)$ ، $(E_2, \circ')$ فضاءين أقليديين ،
وليكن $f \in L(E_1, E_2)$. فان f عمودي $\Leftrightarrow f^* = f^{-1}$

البرهان :

لنفرض ان $f^* = f^{-1}$ ، فانه لكل $u, v \in E_1$ فان

. $f(v), f(u) \in E_2$

فأنه :

$$f(v) \circ' f(u) = v \circ f^*(f(u)) = v \circ f^{-1}(f(u)) = v \circ u$$

وبذلك فأن f يكون تطبيقاً عمودياً

لنفرض الآن ان f عمودي ، فأنه لكل $v_1, v_2 \in E_1$ ،

$$f(v_1) \circ' f(v_2) = v_1 \circ v_2$$

فأنه لكل $v \in E_1$ ولكل $u \in E_2$:

$$f(v) \circ' u = f(v) \circ' f(f^{-1}(u)) = v \circ f^{-1}(u)$$

فأن $f^* = f^{-1}$.

(و. هـ. م.)

6.4 الفضاء الهيرميتي

1.6.4 تعريف

ليكن H_1 ، H_2 فضاءين شعاعيين على حقل الاعداد العقدية $\mathbb{C}$ ، وليكن f تطبيقاً من H_1 في H_2. نقول ان التطبيق f هو تطبيق نصف خطي اذا تحقق مايلي :-

(1) لكل $u, v \in H_1$ ، $f(u+v) = f(u) + f(v)$

(2) لكل $u \in H_1$ ولكل $\lambda \in \mathbb{C}$ ، $f(\lambda u) = \bar{\lambda} f(u)$

اذا كان $f : H_1 \to \mathbb{C}$ تطبيقاً وحقق (1) و (2) عندئذ نقول ان f هو شكل نصف خطي على H_1 .

2.6.4 تعريف

ليكن H فضاءاً شعاعياً على الحقل $\mathbb{C}$. وليكن $f : H \times H \to \mathbb{C}$ تطبيقاً . نقول ان f هو شكل ثلاثة أنصاف الخطية على H ، اذا كان لكل $u_1, u_2, u_3 \in H$ ولكل $\lambda \in \mathbb{C}$ فان :

$$f(u_1+u_2, u_3) = f(u_1, u_3) + f(u_2, u_3) \qquad (1)$$

$$f(u_1, u_2+u_3) = f(u_1, u_2) + f(u_1, u_3)$$

$$f(\lambda u_1, u_2) = \lambda f(u_1, u_2) \qquad (2)$$

$$f(u_1, \lambda u_2) = \bar{\lambda} f(u_1, u_2)$$

ونقول ان f هو شكل هيرميتي على H اذا كان :-

$$\forall u_1, u_2 \in H, \quad f(u_1, u_2) = \overline{f(u_2, u_1)}$$

ونقول ان الشكل الهيرميتي f محددة موجبة اذا كان:

لكل $u \in H$ ، $f(u, u) \geqslant 0$

و $u = 0 \iff f(u, u) = 0$

3.6.4 مثال

على الفضاء الشعاعي $\mathbb{C}^n$ على الحقل $\mathbb{C}$ نعرف التطبيق $f : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ كما يلي :-

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n ;\ f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$$

فان f هو شكل هيرميتي على الفضاء $\mathbb{C}^n$.

تعريف 4.6.4

ليكن H فضاءً شعاعياً ذا بعد n على الحقل $\mathbb{C}$. ولتكن $\{v_1,\dots,v_n\}$ اساساً في H ، وليكن f شكلاً هرميتياً على H . فأنه لكل $v, u \in H$ ،

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \quad , \quad u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

حيث $\alpha_i, \lambda_i \in \mathbb{C}$. من هنا ومن كون f شكل هيرميتي فأن :

$$f(v,u) = f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \ , \ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)$$
$$= \alpha_1 \bar{\lambda}_1 f(v_1, v_1) + \dots + \alpha_1 \bar{\lambda}_n f(v_1, v_n) + \dots + \alpha_n \bar{\lambda}_1 f(v_n, v_1)$$
$$+ \dots + \alpha_n \bar{\lambda}_n f(v_n, v_n)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} f(v_i, v_j)\, \alpha_i \bar{\lambda}_j$$

حيث $f(v_i, v_j) \in \mathbb{C}$. فإذا وضعنا $f(v_i, v_j) = a_{ij}$ لكل $i, j = 1,\dots,n$ فأن :

$$f(v,u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \alpha_i \bar{\lambda}_j$$

حيث λ_j هي مركبات الشعاع u ، α_i هي مركبات الشعاع v في الاساس $\{v_1,\dots,v_n\}$.

نسمي المصفوفة $A = (a_{ij})$ بالمصفوفة المرافقة للشكل الهيرميتي f في الأساس $\{v_1,\dots,v_n\}$.

لتكن الآن $\{u_1,\dots,u_n\}$ اساساً آخراً في H ، فأن:

$$u_1 = c_{11} v_1 + c_{21} v_2 + \dots + c_{n1} v_n$$
$$u_2 = c_{12} v_1 + c_{22} v_2 + \dots + c_{n2} v_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_n = c_{1n}v_1 + c_{2n}v_2 + \cdots + c_{nn}v_n$$

حيث $c_{ij} \in \mathbb{C}$. فأن مصفوفة العبور من الأساس $\{v_1, \ldots, v_n\}$ الى الاساس $\{u_1, \ldots, u_n\}$ هي :

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

نجد المصفوفة المرافقة للشكل الهيرميتي f في الاساس $\{u_1, \ldots, u_n\}$ ولتكن $B = (b_{ij})$ ، فأنه لكل $1 \le p \le n$ ، $1 \le q \le n$:

$$b_{pq} = f(u_p, u_q) = f(c_{1p}v_1 + c_{2p}v_2 + \cdots + c_{np}v_n \,,\, c_{1q}v_1 + c_{2q}v_2 + \cdots + c_{nq}v_n)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} f(v_i, v_j)\, c_{ip}\, \overline{c_{jq}}$$

لكن مما سبق لدينا $f(v_i, v_j) = a_{ij}$ لكل $i,j = 1, \ldots, n$ فأن :

$$b_{pq} = \sum_{i,j=1}^{n} c'_{pi}\, a_{ij}\, \overline{c}_{jq}$$

حيث $c'_{pi} = c_{ip}$ هي عناصر المصفوفة C^T .

فأذا رمزنا للمصفوفة التي عناصرها $\overline{c}_{ij}$ بالرمز $\overline{C}$

فأن : $B = C^T A \overline{C}$

5.6.4 تعريف

ليكن H فضاءً شعاعياً ذا بعد منتهي على الحقل

$\mathbb{C}$ ، وليكن f شكلاً هيرميتياً محدداً موجباً على H.
نقول عندئذ ان H هو فضاء هيرميتي ، ونقول ان f هو الضرب السلمي على H . فاذا رمزنا للضرب السلمي بالرمز $\circ$ فأننا نرمز للفضاء الهيرميتي بالرمز $(H, \circ)$.
الفضاء الشعاعي الجزئي في H نسميه بالفضاء الهيرميتي الجزئي .
في المثال (3.6.4) فأن $(\mathbb{C}^n, \circ)$ هو فضاء هيرميتي.

6.6.4 تعريف

ليكن $(H, \circ)$ فضاءً هيرميتياً . لكل $u, v \in H$ نقول ان v عمودي على u (أو u عمودي على v) ونكتب $u \perp v$ اذا كان $v \circ u = 0$.
نقول عن الأساس $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ للفضاء H انه اساس متعامد اذا كان : $\omega_i \circ \omega_j = 0$ لكل $i \neq j$.
ونقول عن الاساس $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ للفضاء H انه اساس معياري متعامد اذا كان :

$$\varepsilon_i \circ \varepsilon_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

ليكن H_1 فضاءً هيرميتياً جزئياً في H ، نقول ان الشعاع $u \in H$ عمودي على الفضاء H_1 اذا كان $u \circ u_1 = 0$ لكل $u_1 \in H_1$ ونكتب $u \perp H_1$.
نسمي المجموعة $\{u \in H ; u \perp H_1\}$ بالمكملة العمودية

للفضاء الهيرميتي الجزئي H_1 ونرمز لها بالرمز $H_1^{\perp}$.
ونقول ان الفضاءين الهيرميتين الجزئيين H_1 ، H_2 من الفضاء H أنهما متعامدين واذا كان لكل $v_1 \in H_1$ ،
ولكل $v_2 \in H_2$ ، $v_1 \circ v_2 = 0$ ونكتب $H_1 \perp H_2$.

7.6.4 نظرية

ليكن $(H, \circ)$ فضاءاً هيرميتياً ، فأن :

(1) لكل $v \in H$ ، $\|v\| = 0 \iff v = 0$

(2) لكل $v \in H$ ولكل $\lambda \in \mathbb{C}$ ، $\|\lambda v\| = |\lambda| . \|v\|$

(3) لكل $v_1, v_2 \in H$ ، $|v_1 \circ v_2| \leq \|v_1\| . \|v_2\|$

(4) لكل $v_1, v_2 \in H$ ، $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$.

واذا كان v_1 ، v_2 متعامدين فأن :

$$\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$$

البرهان :

برهان جميع فروع النظرية مشابهة لبرهان النظرية (6.2.4) مع مراعاة خواص الاعداد العقدية ، لذلك سنبرهن احد الفروع كنموذج ليكن (4) .

$$\|v_1 + v_2\|^2 = (v_1 + v_2) \circ (v_1 + v_2) = (v_1 \circ v_1) + (v_1 \circ v_2) + (v_2 \circ v_1) + (v_2 \circ v_2)$$

$$= \|v_1\|^2 + (v_1 \circ v_2) + \overline{(v_1 \circ v_2)} + \|v_2\|^2$$

$$= \|v_1\|^2 + 2\mathcal{R}(v_1 \circ v_2) + \|v_2\|^2$$

$$\leq \|v_1\|^2 + 2|v_1 \circ v_2| + \|v_2\|^2$$

$$\leq \|v_1\|^2 + 2\|v_1\| \|v_2\| + \|v_2\|^2$$

فأن ، $\|v_1+v_2\|^2 \leq (\|v_1\|+\|v_2\|)^2$

من هنا نستنتج $\|v_1+v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$

إذا كان v_1 ، v_2 متعامدين فأن : $v_1 \circ v_2 = v_2 \circ v_1 = 0$

فأن : $\|v_1+v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$

(و. هـ. م.)

8.6.4 نظرية

ليكن $(H, \circ)$ فضاءً هيرميتياً ذا بعد n، ولتكن $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ اساساً معيارياً متعامداً في H . فأنه لكل $x, y \in H$ إذا كان $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i$ ، $y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \varepsilon_i$ حيث $\mu_i, \lambda_i \in \mathbb{C}$ فأن :

$$x \circ y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{\mu}_i \; .$$

البرهان :

$$x \circ y = (\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n) \circ (\mu_1 \varepsilon_1 + \dots + \mu_n \varepsilon_n)$$

$$= \lambda_1 \bar{\mu}_1 (\varepsilon_1 \circ \varepsilon_1) + \dots + \lambda_1 \bar{\mu}_n (\varepsilon_1 \circ \varepsilon_n) + \dots + \lambda_n \bar{\mu}_1 (\varepsilon_n \circ \varepsilon_1) +$$

$$\dots + \lambda_n \bar{\mu}_n (\varepsilon_n \circ \varepsilon_n)$$

$$= \lambda_1 \bar{\mu}_1 + \dots + \lambda_n \bar{\mu}_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{\mu}_i$$

(و. هـ. م.)

نرى ان مفهوم التعامد والنظريات المتعلقة به في الفضاء الأقليدي ينتقل الى الفضاء الهيرميتي مع بعض التغيرات المتعلقة بالفرق بين الضرب السلمي في الفضاء الأقليدي

والفضاء الهيرميتي . لذلك فأننا سنترك دراسة تلك النظريات والمفاهيم للقارئ ، فمثلاً طريقة كرام شميت للحصول على اساس متعامد في الفضاء الأقليدي يمكن بحثها بنفس الطريقة في الفضاء الهيرميتي وسنتركها للقارئ . كما وسنترك للقارئ برهان النظرية التالية :

9.6.4 نظرية

ليكن (H,σ) فضاءً هيرميتياً ذا بعد n ، H_1 فضاءً هيرميتياً جزئياً في H ، فأن :

(1) $H_1^{\perp}$ هو فضاء هيرميتي جزئي في H .

(2) لكل $x \in H$ فأن $x \perp H_1 \Leftrightarrow x$ عمودي على جميع اشعة أساس H_1 .

(3) واذا كانت $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ اشعة معيارية متعامدة في H ، فأن $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ تكون اساساً معيارياً متعامداً في H .

(4) واذا كان بعد H_1 هو k فأنه يوجد اساس معياري متعامد $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ في H بحيث أن $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in H_1$ و $\varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_n \in H_1^{\perp}$.

(5) $H = H_1 \oplus H_1^{\perp}$ وكذلك :

$$\dim H = \dim H_1 + \dim H_1^{\perp}$$

10.6.4 تعريف

ليكن (H_1,σ) ، (H_2,σ') فضاءان هيرميتيين

وليكن $f \in L(H_1, H_2)$.

(1) نقول ان f هو تطبيق احادي إذا كان :

$$\forall v, u \in H_1 , \quad f(v) \circ' f(u) = v \circ u$$

(2) نقول ان $f^* \in L(H_2, H_1)$ هو التطبيق الثنوي للتطبيق f إذا كان :

$$\forall v \in H_1 , \forall u \in H_2 , \quad f(v) \circ' u = v \circ f^*(u)$$

وإذا كان $f : H_1 \to H_1$ بحيث ان $f = f^*$ نقول عندئذ ان f هو التطبيق الثنوي لنفسه .

نستنتج من التعريف السابق مباشرة ، إذا كان $(H, \circ)$ فضاءاً هيرميتياً و $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ اسسة معيارية متعامدة في H ، $f : H \to H$ تطبيقاً احادياً ، فأن الاسسة $f(\varepsilon_1), \dots, f(\varepsilon_n)$ هي اسسة معيارية متعامدة .

وكذلك حسب النظرية (10.5.4) f يكون احادياً $\Leftrightarrow f^* = f^{-1}$ $\Leftrightarrow f \circ f^* = Id_H$.

تعريف 11.6.4

لتكن $A \in M_n(\mathbb{C})$ ، نسمي المصفوفة $\bar{A}^T$ تنولية المصفوفة A ونرمز لها بالرمز A^* . ونقول ان A هي مصفوفة هيرميتية إذا كانت $A = A^*$.

ونقول ان المصفوفة A هي مصفوفة احادية إذا كانت اسسة اعمدة A تكون مجموعة معيارية متعامدة .

12.6.4 نظرية

المصفوفة $A \in M_n(\mathbb{C})$ هي مصفوفة احادية $\Longleftrightarrow$ $A^*A = I_n$.

البرهان :

لتكن :

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

فأن :

$$A^* = \bar{A}^T = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \cdots & \bar{a}_{n1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

لنفرض الآن ، ان المصفوفة A هي مصفوفة احادية، فأن اشعة اعمدة المصفوفة A مجموعة معيارية متعامدة. فأنه لكل $i,j = 1,\ldots,n$ العنصر في السطر i والعمود j في المصفوفة A^*A هي :

$$x = \bar{a}_{1i}\, a_{1j} + \bar{a}_{2i}\, a_{2j} + \cdots + \bar{a}_{ni}\, a_{nj}$$

$$= \overline{a_{1i}\,\bar{a}_{1j} + a_{2i}\,\bar{a}_{2j} + \cdots + a_{ni}\,\bar{a}_{nj}} = \overline{C_i \circ C_j} = \begin{cases} 1 & \text{عندما } i=j \\ 0 \ , & i \neq j \end{cases}$$

فأن :

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

وبالعكس اذا كانت $A^*A = I_n$ فأنه مما سبق في

البرهان ينتج أن :

$$c_i \circ c_j = \begin{cases} 1 & \text{عندما } i=j \\ 0 & \text{عندما } i\neq j \end{cases}$$

فأن اشعة اعمدة A هي مجموعة معيارية متعامدة ، اي ان المصفوفة A أحادية .

(و. هـ. م.)

من هنا وبأستخدام نفس الطرق كما في النظرية (6.5.4) يبرهن بسهولة ان : المصفوفة الحيادية هي مصفوفة أحادية، والمصفوفة A احادية $\Leftrightarrow$ $A^* = A^{-1}$.

وحاصل ضرب مصفوفتين احاديتين هي مصفوفة أحادية.

ومحدد المصفوفة الأحادية هي ± 1 . لأنه مصفوفة عكوسة A إذا كانت A احادية ، فأن A^{-1} تكون ايضاً احادية .

13.6.4 نظرية

ليكن $(H_1, \circ)$ ، $(H_2, \circ')$ فضاءين هيرميتيين ذوي بعدين n . ولتكن $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ اساساً معيارياً متعامداً في H_1 ، $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ اساساً معيارياً متعامداً في H_2 . وليكن $f \in L(H_1, H_2)$ فأن :

f يكون احادياً $\Leftrightarrow$ المصفوفة المرافقة لـ f مصفوفة احادية .

البرهان :

لتكن $A = (a_{ij})$ المصفوفة المرافقة للتطبيق

الخطي f بالنسبة للأساسين المذكورين . وليكن o'' هو الضرب السلمي في $\mathbb{C}^n$ ، فأنه لكل i, j :

$$f(\varepsilon_i) = a_{1i}\beta_1 + \cdots + a_{ni}\beta_n$$

$$f(\varepsilon_j) = a_{1j}\beta_1 + \cdots + a_{nj}\beta_n$$

فأن :

$$f(\varepsilon_i)\, o'\, f(\varepsilon_j) = \left(\sum_{p=1}^{n} a_{pi}\beta_p\right) o' \left(\sum_{q=1}^{n} a_{qj}\beta_q\right)$$

$$= \sum_{p=1}^{n} a_{pi}\,\bar{a}_{pj}$$

وكذلك :

$$c_i\, o''\, c_j = \sum_{p=1}^{n} a_{pi}\,\bar{a}_{pj}$$

اي ان :

$$f(\varepsilon_i)\, o'\, f(\varepsilon_j) = c_i\, o''\, c_j$$

واذا كان f تطبيقاً احادياً فأنه لكل $i, j = 1, \ldots, n$:

$$c_i\, o''\, c_j = f(\varepsilon_i)\, o'\, f(\varepsilon_j) = \varepsilon_i \circ \varepsilon_j = \begin{cases} 1 & \text{عندما } i = j \\ 0 & \text{عندما } i \neq j \end{cases}$$

فأن المجموعة $c_1, \ldots, c_n$ مجموعة معيارية متعامدة اي ان المصفوفة A احادية .

ويبرهن العكس بأستخدام نفس الاسلوب السابق لاحظ النظرية (8 . 5 . 4) .

(و . هـ . م .)

14.6.4 نظرية

ليكن (H_1, o) ، (H_2, o') فضاءين هيرميتيين ، وليكن $f \in L(H_1, H_2)$ فإنه يوجد $f^* \in L(H_2, H_1)$ وحيد بحيث انه لكل $v \in H_1$ ولكل $u \in H_2$: $f(v) o' u = v o f^*(u)$.

البرهان :

لتكن $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ اساساً معيارياً متعامداً في H_1 ، و $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ اساساً معيارياً متعامداً في H_2 وليكن $f : H_1 \to H_2$ تطبيقاً خطياً ، $A = (a_{ij})$ المصفوفة المرافقة لـ f . فإنه لكل $v \in H_1$ ، $v = \lambda_1 \varepsilon_1 + \cdots + \lambda_n \varepsilon_n$.

فإن :

$$f(v) = f(\lambda_1 \varepsilon_1 + \cdots + \lambda_n \varepsilon_n) = (\lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_n a_{1n})\beta_1 + \cdots + (\lambda_1 a_{m1} + \cdots + \lambda_n a_{mn})\beta_m$$

ليكن $f^* : H_2 \to H_1$ معرفاً كمايلي :

$$\forall u \in H_2 \ , \ u = \gamma_1 \beta_1 + \cdots + \gamma_m \beta_m \ ; \ f^*(u) = f^*(\gamma_1 \beta_1 + \cdots + \gamma_m \beta_m)$$

$$= (\bar{a}_{11}\gamma_1 + \cdots + \bar{a}_{m1}\gamma_m)\varepsilon_1 + \cdots + (\bar{a}_{1n}\gamma_1 + \cdots + \bar{a}_{mn}\gamma_m)\varepsilon_n$$

بنفس الطريقة كما في النظرية (9.5.4) نبرهن أن f^* تطبيق خطي ، وأنه التطبيق الثنوي للتطبيق f .

(و . هـ . م .)

من برهان هذه النظرية وكما في النظرية (9.5.4) نستنتج أن : المصفوفة المرافقة للتطبيق f^* هي المصفوفة

$$\bar{A}^T = A^*$$

7.4 إيزومورفيزم الفضاءات الهيرميتية والأقليدية

في هذا البند سنذكر التعاريف والنظريات بالنسبة للفضاءات الهيرميتية. ولتوضيح ان نفس التعريف والنظرية صحيحة بالنسبة للفضاءات الأقليدية سنكتب بين قوسين كلمة الأقليدي. وسنبرهن النظريات في حالة الفضاءات الهيرميتية وسنترك برهان حالة الفضاءات الأقليدية للقارئ.

1.7.4 تعريف

ليكن $(H_1, \circ)$ ، $(H_2, \acute{\circ})$ فضاءين هيرميتين (أقليديين) . نقول ان التطبيق $\varphi : H_1 \to H_2$ هو ايزومورفيزم الفضاءات الهيرميتية (الأقليدية) إذا تحقق :-

(1) φ هو ايزومورفيزم الفضاءات الشعاعية .

(2) لكل $u, v \in H_1$ ، $\varphi(u) \acute{\circ} \varphi(v) = u \circ v$

ايزومورفيزم الفضاء الهيرميتي (الأقليدي) على نفسه نسميه اوتومورفيزماً .

2.7.4 نظرية

(1) التطبيق الحيادي لأي فضاء هيرميتي (أقليدي) هو ايزومورفيزم .

(2) تركيب ايزومورفيزمين للفضاءات الهيرميتية (الأقليدية) هو ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية (اقليدية) .

(3) التطبيق العكسي لأيزومورفيزم فضاءات هيرميتية (اقليدية)

هو ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية (اقليدية).

البرهان :

(1) ليكن $(H, \circ)$ فضاءاً هيرميتياً ، وليكن $Id_H : H \to H$ تطبيقاً حيادياً . واضح ان Id_H هو ايزومورفيزم فضاءات شعاعية .

لكل $u, v \in H$ ، $Id_H(u) \circ Id_H(v) = u \circ v$

وبذلك فأن Id_H هو ايزومورفيزم لفضاءات هيرميتية .

(2) ليكن $(H_1, \circ)$ ، $(H_2, \acute{\circ})$ ، $(H_3, \ddot{\circ})$ ثلاث فضاءات هيرميتية ، وليكن $f_1 : H_1 \to H_2$ ، $f_2 : H_2 \to H_3$ ايزومورفيزمين للفضاءات الهيرميتية . لنبرهن أن :

$f_3 = f_2 \circ f_1 : H_1 \longrightarrow H_3$ هو ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية . بما ان تركيب تطبيقين خطيين هو تطبيق خطي ، وتركيب تقابلين هو تقابل ، فأن f_3 هو ايزومورفيزم فضاءات شعاعية .

لكل $u, v \in H_1$ فأن :

$$f_3(u) \ddot{\circ} f_3(v) = (f_2 \circ f_1)(u) \ddot{\circ} (f_2 \circ f_1)(v)$$

$$= f_2(f_1(u)) \ddot{\circ} f_2(f_1(v))$$

لكن بما ان $f_1(u), f_1(v) \in H_2$ فأن :

$$f_3(u) \ddot{\circ} f_3(v) = f_1(u) \acute{\circ} f_1(v) = u \circ v$$

نبذلك نستنتج ان $f_3 = f_2 \circ f_1$ هو ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية .

(3) ليكن $(H_1, \circ)$ ، $(H_2, \circ')$ فضاءين هيرميتين ، وليكن $f : H_1 \to H_2$ ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية ، فأن f هو ايزومورفيزم فضاءات شعاعية، كما برهنا سابقاً فأن $f^{-1} : H_2 \to H_1$ هو ايضاً ايزومورفيزم فضاءات شعاعية .

لكل $u_2, v_2 \in H_2$ يوجد $u_1, v_1 \in H_1$ بحيث :

$f(u_1) = u_2$ ، $f(v_1) = v_2$ فأن :

$$f^{-1}(u_2) \circ f^{-1}(v_2) = u_1 \circ v_1 = f(u_1) \circ' f(v_1) = u_2 \circ' v_2$$

لذلك فأن f^{-1} هو ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية .

(و . هـ . م .)

نظرية 3.7.4

ليكن $(H_1, \circ)$ ، $(H_2, \circ')$ فضاءين هيرميتين (أقليديين) ، وليكن $\varphi : H_1 \to H_2$ تطبيقاً خطياً ولكن $\dim H_1 = n$ ، $\{v_1, \ldots, v_n\}$ اساس في H_1 . فأن φ هو ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية (اقليدية) $\Leftrightarrow$

(1) $\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\}$ اساس للفضاء H_2 .

(2) $\varphi(v_i) \circ' \varphi(v_j) = v_i \circ v_j$ لكل $i, j = 1, \ldots, n$.

البرهان :

لنفرض ان φ هو ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية، فأن φ هو ايزومورفيزم فضاءات شعاعية وبذلك فأن $\varphi(H_1) = H_2$ ، فأن $\dim H_2 = n$ ، من هنا وحسب (2.3.2) فأن صورة اساس في H_1 هو اساس في H_2 .

ومنه (1) محقق .

من تعريف ايزومورفيزم الفضاءات الهيرميتية ينتج ان (2) محقق .

لنفرض الآن ان الشرطين (1) ، (2) محققتان .

من (1) ومن (2.3.2) فأن φ هو ايزومورفيزم فضاءات شعاعية .

لكل $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ و $y = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j v_j$ من H_1 ، فأن :

$$x \circ y = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j v_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \bar{\gamma}_j (v_i \circ v_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \bar{\gamma}_j \left(\varphi(v_i) \circ' \varphi(v_j)\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\alpha_i \varphi(v_i)\right) \circ' \left(\gamma_j \varphi(v_j)\right)$$

$$= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) \circ' \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j v_j\right)$$

$$= \varphi(x) \circ' \varphi(y)$$

وبذلك فأن φ هو ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية .

(و . هـ . م .)

تمــارين

(1) في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$ لتكن :

$A = \{v_1 = (1,1,1) , v_2 = (1,1,-1) , v_3 = (1,-1,-1)\}$ اساساً في $\mathbb{R}^3$.

ليكن $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ تطبيقاً معرفاً كما يلي :

$\forall x = (x_1, x_2, x_3) , y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 ; f(x,y) = x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + 3 x_3 y_3$

هل ان f متماثل ؟ اوجد المصفوفة المرافقة لـ f .

(2) لتكن $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ المصفوفة المرافقة للشكل

مزدوج الخطية $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ في الاساس $A = \{v_1 = (1,2), v_2 = (2,1)\}$

اوجد المصفوفة المرافقة لهذا الشكل في الاساس

$B = \{u_1 = (4,-3), u_2 = (5,-3)\}$ ، ثم اوجد هل الشكل . هل ان

f متماثل ؟ اوجد الشكل المرافق لـ f في الاساس A.

(3) لتكن $A = \{e_1 = (1,0) , e_2 = (0,1)\}$ اساساً نظامياً في $\mathbb{R}^2$.

وليكن الشكل التربيعي φ معرفاً على $\mathbb{R}^2$ كما يلي :

$\forall \; x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; \varphi(x) = f(x,x) = 2x_1^2 - 3 x_1 x_2 + x_2^2$

حيث x_i هي مركبات x في الاساس A .

اوجد المصفوفة المرافقة لهذا الشكل ، ثم اوجد المصفوفة

المرافقة لهذا الشكل في الاساس $B = \{v_1 = (1,1) , v_2 = (-2,3)\}$

ثم اكتب هذا الشكل في الأساس B .

(4) ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، و φ شكلاً تربيعياً على V ، f شكلاً مزدوج الخطية مرافقاً لـ φ . برهن انه لكل $x, y, z \in V$:

$$\varphi(x+y)+\varphi(x+z)+\varphi(y+z)-\varphi(x+y+z) = \varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z)$$

ثم برهن ان :

$$\varphi(x+y)+\varphi(x-y) = 2\varphi(x)+2\varphi(y)$$

و

$$\varphi(x+y)-\varphi(x-y) = 2f(x,y)+2f(y,x)$$

(5) بأستخدام طريقة لاكرانك اكتب الشكل التربيعي φ بالشكل القطري حيث φ معرف على $\mathbb{R}^3$ كمايلي :

$$\forall\, x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \ ,\ \varphi(x)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$$

حيث x_i هي مركبات الشعاع x في الاساس النظامي .

(6) بأستخدام طريقة جاكوبي اكتب الشكل التربيعي φ بالشكل القطري حيث φ معرف على $\mathbb{R}^3$ كمايلي :

$$\forall\, x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \ ;\ \varphi(x)=2x_1^2+3x_1x_2+4x_1x_3+x_2^2+x_3^2$$

حيث x_i هي مركبات الشعاع x في الاساس النظامي .

(7) ليكن $(E,\circ)$ فضاءً أقليدياً ، لكل $x, y\in E$ برهن ان :

$$\big|\,\|x\|-\|y\|\,\big| \le \|x-y\| \qquad (1)$$

$$x\circ y = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right) \qquad (2)$$

(8) ليكن $\mathbb{R}^2$ فضاءاً شعاعياً على الحقل $\mathbb{R}$ ، ولنكن $\circ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ معرفاً كما يلي :

$$x \circ y = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

حيث x_i هي مركبات الشعاع x ، y_i هي مركبات الشعاع y ، في الاساس النظامي .

برهن ان $\circ$ هو الضرب السلمي على $\mathbb{R}^2$. وبرهن ان الشعاع $(1,0)$ عمودي على الشعاع $(0,1)$ ، وان الشعاع $(1,1)$ عمودي على الشعاع $(-1,-1)$. ثم اوجد طول كل من هذه الأشعة .

(9) ليكن $(\mathbb{R}^3, \circ)$ فضاءاً أقليدياً ، لكل $u, v \in \mathbb{R}^3$.

(a) بين انه اذا كان u متعامداً مع v ، فأن كل مضاعف عددي لـ u هو متعامد مع v .

(b) اذا كانت $v_1 = (1,1,2)$ ، $v_2 = (0,1,3)$ اوجد الشعاع v_3 بحيث يكون متعامداً مع v_1 و v_2 .

(c) اذا كانت $A = \{v_1 = (1,1,1) , v_2 = (0,1,2), v_3 = (1,0,4)\}$ اساساً في $\mathbb{R}^3$ فأوجد اساس معياري متعامد في $\mathbb{R}^3$.

(10) ليكن $(E, \circ)$ فضاءاً أقليدياً و E_1 فضاءاً أقليدياً جزئياً في E .

(a) برهن ان $(E_1^{\perp})^{\perp} = E_1$

(b) اذا كان $E = \mathbb{R}^3$

و $E_1 = \{(x_1, x_2, 0) \; ; \; x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ (1) ، $E_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \; ; \; x_1 = x_3 \in \mathbb{R}\}$ (2)

اوجد $E_1^{\perp}$ في كل حالة . هل $E = E_1 \oplus E_1^{\perp}$ ؟

(c) ليكن $E = \mathbb{R}^4$ ولتكن :

$E_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \; ; \; x_2 = 0 , x_4 = x_1 + x_3\}$ اوجد اساس

معياري متعامد $A = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ في E بحيث ان

$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in E_1$ ، $\varepsilon_3, \varepsilon_4 \in E_1^{\perp}$.

(11) ليكن $(\mathbb{R}^2, o)$ فضاءً اقليدياً ، وليكن $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

تطبيقاً معرفاً كمايلي :-

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 , \; f(x_1, x_2) = (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta , x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta)$$

برهن ان f تطبيق عمودي ، ثم اوجد المصفوفة المرافقة

للتطبيق f بالنسبة للأساس النظامي .

(12) ليكن $(\mathbb{C}^2, o)$ فضاءً هيرميتياً ، وليكن

$f, h : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ تطبيقين معرفين كالآتي :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 , \; f(z_1, z_2) = (2iz_1, iz_2) \; , \; h(z_1, z_2) = (z_1, iz_2)$$

بين أياً من f ، h تطبيق احادي بالنسبة للأساس

النظامي في $\mathbb{C}^2$ ؟ . اوجد المصفوفة المرافقة لكل

من f ، h . اي من المصفوفتين احادية ؟ .

(13) ليكن (E_1, o) ، (E_2, o') فضاءين اقليديين

نسمي التطبيق $f : E_1 \to E_2$ ايزومتراً اذا كان :

$$\forall\, x,y \in E_1 \quad , \quad d(f(x), f(y)) = d(x,y)$$

إذا كان $F: E_1 \to E_2$ ايزومتراً بحيث $F(0)=0$ ، برهن ان F تطبيق عمودي .

(14) ليكن $(\mathbb{C}^2, \circ)$ ، $(\mathbb{C}^3, \acute{\circ})$ فضاءين هيرميتين .
ولتكن $A=\{e_1, e_2\}$ ، $B=\{\acute{e}_1, \acute{e}_2, \acute{e}_3\}$ اساسين نظاميين في $\mathbb{C}^2$ ، $\mathbb{C}^3$ على التوالي .

(a) ليكن $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ معرفاً كالآتي :
$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1+x_2)$ حيث x_i هي مركبات الشعاع x في الاساس النظامي ، اوجد التطبيق الثنوي للتطبيق f .

(b) ليكن $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ معرفاً كالآتي :
$f(x_1, x_2) = (2x_1+x_2, x_1+2x_2)$ اوجد التطبيق الثنوي للتطبيق f .

(15) ليكن $(H, \circ)$ فضاءً هيرميتياً ، لكل $f_1, f_2 \in L(H,H)$ ولكل $k \in \mathbb{C}$ إذا كان f_1^* ، f_2^* التطبيقان الثنويان لـ f_1 ، f_2 على التوالي ، برهن ان :

(a) $I^* = I$ ، $f_0^* = f_0$.

(b) $(f_1+f_2)^* = f_1^* + f_2^*$

(c) $(k f_1)^* = \bar{k} f_1^*$

(d) $(f_1 \circ f_2)^* = f_2^* \circ f_1^*$

(e) $(f_1^*)^* = f_1$

(f) إذا كان f_1 عكوساً فأن: $(f_1^{-1})^* = (f_1^*)^{-1}$.

(g) لكل $v \in H$ ، $f(v) = 0 \iff f \circ f^*(v) = 0$ أحادي

(16) ليكن H فضاءً شعاعياً على الحقل $\mathbb{R}$ ، ∘ ضرباً سلمياً في H . وليكن $f: H \to H$ تطبيقاً خطياً .

برهن ان $f = f_0$ إذا تحققت اي من الشروط التالية :

(a) لكل $u, v \in H$ ، $f(u) \circ v = 0$

(b) إذا كان $(H, \circ)$ فضاءً هيرميتياً فأن :

$f(u) \circ u = 0$ لكل $u \in H$.

(c) f ثنوي لنفسه و $f(u) \circ u = 0$ لكل $u \in H$.

ثم اعط مثالاً لتطبيق خطي f على فضاء اقليدي E بحيث يكون $f(u) \circ u = 0$ لكل $u \in E$ و $f \neq f_0$.

(17) ليكن $(H, \circ)$ فضاءً هيرميتياً ، وليكن f تطبيقاً خطياً على H .

برهن أن الشروط التالية متكافئة :

(a) f أحادي

(b) f يحافظ على حاصل الضرب السلمي .

(c) f يحافظ على الأطوال .

الفصل الخامس
الأشعة الذاتية والقيم الذاتية

1.5 مبادئ أولية

1.1.5 تعريف

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، وليكن $f: V \to V$ تطبيقاً خطياً . نقول ان الشعاع $0 \neq v \in V$ هو شعاع ذاتي للتطبيق الخطي f اذا وجد $\lambda \in K$ بحيث $f(v) = \lambda v$.

نلاحظ ان $f(0) = 0 = \lambda . 0$ لكل $\lambda \in K$ ، لذلك فأننا في تعريف الشعاع الذاتي نشترط الأختلاف عن الصفر .

ونلاحظ انه لكل شعاع ذاتي v للتطبيق الخطي f يوجد λ واحد فقط في K بحيث أن $f(v) = \lambda v$ ، لأنه اذا وجد $\lambda' \in K$ بحيث $f(v) = \lambda' v$ فأن $\lambda v = \lambda' v$ اي أن $(\lambda - \lambda') v = 0$ ، بما ان $v \neq 0$ فأن $\lambda = \lambda'$.

نقول ان λ هو قيمة ذاتية للتطبيق الخطي f اذا وجد $0 \neq v \in V$ بحيث ان $f(v) = \lambda v$ ، ونسمي عندئذ v شعاعاً ذاتياً مشاركاً للقيمة الذاتية λ ، كما ونسمي λ قيمة ذاتية مشاركة للشعاع الذاتي v .

نرمز لمجموعة الاشعة الذاتية المشاركة للقيمة الذاتية λ بالرمز V_λ .

5.1.2 نظرية

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، وليكن $f: V \to V$ تطبيقاً خطياً . إذا كان λ قيمة ذاتية للتطبيق الخطي f ، فأن المجموعة V_λ هي فضاء شعاعي جزئي من V.

البرهان :

V_λ ليست خالية لأنه يوجد على الأقل $v \in V$ واحد بحيث أن $f(v) = \lambda v$.

لكل $v_1, v_2 \in V_\lambda$ فأن $f(v_1) = \lambda v_1$ ، $f(v_2) = \lambda v_2$ فأن :

$$f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = \lambda (v_1 - v_2)$$

فأن : $v_1 - v_2 \in V_\lambda$

لكل $\alpha \in K$ ، $f(\alpha v_1) = \alpha f(v_1)$

$$= \alpha (\lambda v_1) = \lambda (\alpha v_1)$$

فأن $\alpha v_1 \in V_\lambda$

وبذلك فأن V_λ هي فضاء شعاعي جزئي في V .

(و. هـ. م.)

5.1.3 تعريف

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، وليكن $f: V \to V$ تطبيقاً خطياً ، λ قيمة ذاتية مشاركة للتطبيق الخطي f . نسمي الفضاء الشعاعي الجزئي V_λ فضاءً شعاعياً جزئياً ذاتياً مشاركاً للقيمة الذاتية λ .

4.1.5 نظرية

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، ولتكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ اساساً في V ، وليكن $f: V \to V$ تطبيقاً خطياً ، $A = (a_{ij})$ المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f . ليكن $\lambda \in K$ فأن :

(1) λ قيمة ذاتية للتطبيق $f \iff \det(A - \lambda I_n) = 0$

(2) $\det(A - \lambda I_n)$ لا يعتمد على اختيار الأساس.

البرهان :

(1) ليكن λ قيمة ذاتية للتطبيق f ، فأنه يوجد $0 \neq v \in V$ بحيث أن $f(v) = \lambda v$ اي ان $f(v) = \lambda Id_V(v)$ فأن :

$$(f - \lambda Id_V)(v) = f(v) - \lambda Id_V(v) = 0$$

أي أن : $0 \neq v \in Ker(f - \lambda Id_V)$ ، ومنه فأن $(f - \lambda Id_V)$ ليس متباين ، وبذلك فأن $f - \lambda Id_V$ ليس تقابل .

من هنا فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق $f - \lambda Id_V$ والتي هي $A - \lambda I_n$ غير عكوسة ، فأن $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

وبالعكس واذا كان $\det(A - \lambda I_n) = 0$ نستنتج ان التطبيق $f - \lambda Id_V$ ليس تقابل . حسب النظرية $(7 . 3 . 2)$

فأن $f - \lambda Id_V$ ليس متباين ، وبذلك فأن $ker(f - \lambda Id_V) \neq \{0\}$

اي انه يوجد $0 \neq v \in Ker(f - \lambda Id_V)$. من هنا فأن :

$$(f - \lambda Id_V)(v) = 0$$

وبذلك $f(v)=\lambda v$ اي ان λ هو قيمة ذاتية للتطبيق f.

(2) لتكن $\{u_1,\ldots,u_n\}$ اساساً آخراً للفضاء V.

ولتكن P مصفوفة العبور من الاساس $\{v_1,\ldots,v_n\}$ الى الاساس $\{u_1,\ldots,u_n\}$. ولتكن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f في الاساس $\{u_1,\ldots,u_n\}$ هي B. فانه حسب ما برهنا في (3.7.3 فرع (5)) فأن: $B=P^{-1}AP$.

فأن:

$$\det(B-\lambda I_n)=\det(P^{-1}AP-\lambda I_n)=\det(P^{-1}AP-\lambda P^{-1}I_nP)$$
$$=\det(P^{-1}(A-\lambda I_n)P)=\det(P^{-1})\det(A-\lambda I_n).\det(P)$$
$$=\det(A-\lambda I_n)$$

(و.هـ.م.)

من برهان هذه النظرية نستنتج:

5.1.5 نتيجة

(1) λ قيمة ذاتية للتطبيق $f \Leftrightarrow$ التطبيق $(f-\lambda Id_V)$ غير متباين.

(2) $V_\lambda=\ker(f-\lambda Id_V)$.

6.1.5 تعريف

ليكن V فضاءاً شعاعياً ذا بعد n على الحقل K، وليكن $f:V\to V$ تطبيقاً خطياً، ولتكن $\{v_1,\ldots,v_n\}$ اساساً في V، $A=(a_{ij})$ المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f، x شعاعاً ذاتياً مشاركاً للقيمة الذاتية λ.

فأن: $x=\sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ حيث $x_i\in K$.

من هنا ينتج أن :

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right)$$

$$= x_1 f(v_1) + \cdots + x_n f(v_n)$$

$$= x_1(a_{11} v_1 + \cdots + a_{n1} v_n) + \cdots + x_n(a_{1n} v_1 + \cdots + a_{nn} v_n)$$

$$= (x_1 a_{11} + \cdots + x_n a_{1n}) v_1 + \cdots + (x_1 a_{n1} + \cdots + x_n a_{nn}) v_n$$

من جهة اخرى فأن :

$$f(x) = \lambda x = \lambda(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n)$$

$$= (\lambda x_1) v_1 + \cdots + (\lambda x_n) v_n$$

فأن :

$$(\lambda x_1) v_1 + \cdots + (\lambda x_n) v_n = (x_1 a_{11} + \cdots + x_n a_{1n}) v_1 + \cdots + (x_1 a_{n1} + \cdots + x_n a_{nn}) v_n$$

لكن الاشعة $\{v_1, \ldots, v_n\}$ هي اساس للفضاء V ، فأن :

$$\lambda x_1 = x_1 a_{11} + \cdots + x_n a_{1n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda x_n = x_1 a_{n1} + \cdots + x_n a_{nn} .$$

من هنا فأن :

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

فأن :

$$(A - \lambda I_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

نسمي $\det(A - \lambda I_n)$ لكثيرة الحدود المميز للتطبيق f .
بما أنه لكل مصفوفة $A \in M_n(K)$ يوجد تطبيق خطي f لفضاء شعاعي ذات بعد n ، فأننا نقصد

بالقيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة A ، القيم الذاتية والأشعة الذاتية للتطبيق الخطي f المرافق للمصفوفة A .

لإيجاد القيم الذاتية والأشعة الذاتية المشاركة للتطبيق الخطي f نتبع ما يلي :

إذا فرضنا ان λ قيمة ذاتية للتطبيق f فإنه :

$$\det(A-\lambda I_n)=\det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

عند حساب $\det(A-\lambda I_n)$ نحصل على كثيرة حدود في λ ذي الحوامل من الحقل K ، وحدها الأعلى درجة هو ناتج جداء الحدود الواقعة على القطر الرئيسي .

فيكون :

$$\det(A-\lambda I_n)=(-1)^n\lambda^n+P_1\lambda^{n-1}+\cdots+P_{n-1}\lambda+P_n$$

نرمز لكثيرة الحدود هذه بالرمز $g(\lambda)$.

نقول ان $g(\lambda)$ هي كثيرة الحدود المميز للتطبيق f (أو كثيرة الحدود المميز للمصفوفة A) .

ونسمي المعادلة $g(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)=0$ بالمعادلة المميزة للتطبيق f (أو المعادلة المميزة للمصفوفة A).

بإيجاد حلول هذه المعادلة نوجد القيم الذاتية المشاركة للتطبيق f ، ومنها نوجد الاشعة الذاتية المشاركة لتلك القيم الذاتية .

نلاحظ هنا ، انه اذا كانت المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f مصفوفة مثلثية علوية (سفلية) ، فأن كثيرة الحدود المميز للتطبيق f تكون :

$$g(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda)$$

حيث a_{ii} هي عناصر القطر الرئيسي . فأن a_{ii} هي القيم الذاتية للتطبيق f .

وكذلك نلاحظ انه اذا كانت كثيرة الحدود المميز للمصفوفة A هي حاصل ضرب n كثيرات حدود خطية (من الدرجة الاولى) فأنه يوجد n قيم ذاتية .

مثال 7.1.5

ليكن IR^3 فضاءاً شعاعياً على الحقل IR . لنأخذ تطبيقاً خطياً معرفاً كمايلي : $f : IR^3 \to IR^3$

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in IR^3 \; ; \; f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 - x_3, x_3)$$

فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f في الاساس النظامي هي :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

فأن كثيرة الحدود المميز للتطبيق f هي :

$$g(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & -1\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)^3$$

عندما $g(\lambda)=0$ فأن $(1-\lambda)^3=0$

فأن : $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$

فأن الاشعة الذاتية $x=(x_1,x_2,x_3)$ المشتركة للقيم الذاتية $\lambda=1$ يحقق :

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

من هنا فأن $x_3=0$ اي ان :

$$x=(x_1,x_2,0)=x_1(1,0,0)+x_2(0,1,0)$$

فأن الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المشارك للقيمة الذاتية $\lambda=1$ هو : $V_{\lambda=1}=[(1,0,0),(0,1,0)]$.

2.5 تقطير المصفوفة

في (2.1.3) عرفنا المصفوفة القطرية ، بأنها المصفوفة التي تكون جميع عناصرها أصفاراً عدا عناصر القطر الرئيسي. سندرس في هذا البند كيفية الحصول من اي مصفوفة A على مصفوفة قطرية ، ونسمي العملية هذه بتقطير المصفوفة.

1.2.5 نظرية

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، f تطبيقاً

خطياً من V في V ، ولتكن $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ قيم ذاتية مختلفة للتطبيق f ، و $x_1,\dots,x_n$ اشعة ذاتية مشاركة لتلك القيم الذاتية على التوالي . فأن الاشعة $x_1,\dots,x_n$ مستقلة خطياً.

البرهان :

اذا كان $n=1$ ولما كان $x_1\neq 0$ لأنه شعاع ذاتي ، فأن x_1 مستقلة خطياً .

لنفرض الآن ان النظرية صحيحة من اجل $x_1,\dots,x_{n-1}$ اشعة ذاتية مشاركة للقيم الذاتية المختلفة $\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}$. وليكن λ_n قيمة ذاتية للتطبيق f مختلفاً عن كل من $\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}$ ، وليكن x_n شعاعاً ذاتياً مشاركاً للقيمة الذاتية λ_n.

لأي $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in K$ اذا كان :

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_{n-1}x_{n-1}+\alpha_nx_n=0$$

فأنه اذا كان $\alpha_n=0$ فأن $\alpha_1x_1+\dots+\alpha_{n-1}x_{n-1}=0$

من الفرضية فأن : $\alpha_1=0,\dots,\alpha_{n-1}=0$

فأن : $\alpha_1=0,\dots,\alpha_{n-1}=0,\ \alpha_n=0$

اي ان الاشعة $x_1,\dots,x_n$ مستقلة خطياً .

اذا كان $\alpha_n\neq 0$ فأن :

$$x_n=\gamma_1x_1+\dots+\gamma_{n-1}x_{n-1}$$

حيث $\gamma_i=\dfrac{-\alpha_i}{\alpha_n}$

وبما ان x_n هو شعاع ذاتي مشارك للقيمة الذاتية λ_n

فأن : $f(x_n)=\lambda_nx_n$.

اي ان :

$$f(x_n) = \lambda_n \gamma_1 x_1 + \cdots + \lambda_n \gamma_{n-1} x_{n-1}$$

من جهة اخرى بما ان f خطي فان :

$$f(x_n) = f(\gamma_1 x_1 + \cdots + \gamma_{n-1} x_{n-1})$$
$$= \gamma_1 f(x_1) + \cdots + \gamma_{n-1} f(x_{n-1})$$
$$= \gamma_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + \gamma_{n-1} \lambda_{n-1} x_{n-1}$$

فأن :

$$\lambda_n \gamma_1 x_1 + \cdots + \lambda_n \gamma_{n-1} x_{n-1} = \gamma_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + \gamma_{n-1} \lambda_{n-1} x_{n-1}$$

اي ان :

$$\gamma_1 (\lambda_n - \lambda_1) x_1 + \cdots + \gamma_{n-1} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) x_{n-1} = 0$$

وبما ان الاشعة $x_1, \ldots, x_{n-1}$ مستقلة خطياً حسب الفرض

فأن :

$$\gamma_1 (\lambda_n - \lambda_1) = 0 \ , \ \ldots \ , \ \gamma_{n-1} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) = 0$$

وبما ان λ_i مختلفة، فأن $\lambda_n - \lambda_i \neq 0$ لكل $i = 1, \ldots, n-1$

فأن $\gamma_1 = 0 , \ldots , \gamma_{n-1} = 0$ اي ان $x_n = 0$.

وهذا خلاف للفرض ان $x_n \neq 0$ لأنه شعاع ذاتي،

فأن $\alpha_n = 0$ وبالتالي الاشعة $x_1, \ldots, x_n$ مستقلة خطياً.

(و. هـ. م.)

2.2.5 نظرية

ليكن V فضاءً شعاعياً ذا بعد n على الحقل K،
وليكن f تطبيقاً خطياً من V في V ، فأذا كان
للتطبيق f ، n اشعة ذاتية مختلفة، وإذا اعتبرنا

هذه الاشعة اساساً للفضاء V ، فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق f من هذا الاساس هي مصفوفة قطرية. وبالعكس اذا كانت المصفوفة المرافقة للتطبيق f من اساس معين هي مصفوفة قطرية فأن جميع اشعة تلك الاساس هي اشعة ذاتية للتطبيق f .

البرهان :

لتكن $v_1, \ldots, v_n$ اشعة ذاتية مختلفة للتطبيق f ذي القيم الذاتية المختلفة $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ على الترتيب ، فأن $f(v_i) = \lambda_i v_i$ لكل $i = 1, \ldots, n$.

حسب النظرية (1.2.5) فأن الاشعة $v_1, \ldots, v_n$ مستقلة خطياً ، فأنها اساس للفضاء V .

وكذلك بما ان $v_1, \ldots, v_n$ اشعة ذاتية فأن :

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0.v_2 + \cdots + 0.v_n$$

$$f(v_2) = \lambda_2 v_2 = 0.v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + 0.v_n$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$f(v_n) = \lambda_n v_n = 0.v_1 + 0.v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق f في الاساس $\{v_1, \ldots, v_n\}$ هي :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

وهي مصفوفة قطرية .

وبالعكس، إذا كانت المصفوفة المرافقة للتطبيق f في الاساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ هي :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

فأن :

$$f(v_1) = a_{11} v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$

$$f(v_2) = 0 \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f(v_n) = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + a_{nn} v_n$$

فأن $f(v_i) = a_{ii} v_i$ لكل $i = 1, \dots, n$ ، حيث $a_{ii} \in K$.

فأن الاشعة $v_1, \dots, v_n$ هي اشعة ذاتية للتطبيق f.

(و. هـ. م.)

3.2.5 نظرية

ليكن V فضاءاً شعاعياً ذا بعد n على الحقل K ، ولتكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ اساساً في V . وليكن f تطبيقاً خطياً من V في V . فأذا كان لكثيرة الحدود المميز للتطبيق f ، n قيم ذاتية مختلفة $\lambda_1, \dots, \lambda_n$، فأنه توجد اساس $\{u_1, \dots, u_n\}$ للفضاء V بحيث ان المصفوفة المرافقة للتطبيق f في الاساس $\{u_1, \dots, u_n\}$ هي مصفوفة قطرية ، وعناصر القطر هي القيم الذاتية للتطبيق f.

البرهان :

لكل قيمة ذاتية λ_i يوجد على الأقل شعاع ذاتي

u_i لكل $i=1,\ldots,n$.

بما ان $\lambda_i \neq \lambda_j$ لكل $i \neq j$ فأنه حسب النظرية (5 . 2 . 1) الاشعة $u_1,\ldots,u_n$ مستقلة خطياً ، وبما ان عددها هو n ، فأن الاشعة $\{u_1,\ldots,u_n\}$ هي اساس للفضاء V .
فأنه حسب النظرية (5 . 2 . 2) المصفوفة B المرافقة للتطبيق الخطي f في الاساس $\{u_1,\ldots,u_n\}$ هي مصفوفة قطرية ، بحيث ان عناصر القطر تكون هي القيم الذاتية المختلفة λ_i .

(و . هـ . م .)

<u>5 . 2 . 4 نتيجة</u>

بنفس فرضيات النظرية (5 . 2 . 3) ، واذا كانت المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f في الاساس $\{v_1,\ldots,v_n\}$ هي A ، ومصفوفة العبور من الاساس $\{v_1,\ldots,v_n\}$ الى الاساس $\{u_1,\ldots,u_n\}$ هي P ، فأن العلاقة بين المصفوفة A ، B هي :
$$B = P^{-1} A P$$

<u>5 . 2 . 5 مثال</u>

نأخذ الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$ وأساسه النظامي $\{e_1,e_2,e_3\}$. وليكن $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تطبيقاً خطياً معرفاً كمايلي :
$$\forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_3 \ , \ 5x_2+3x_3 \ , \ -2x_1+4x_3)$$
فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f في الاساس

$\{e_1, e_2, e_3\}$ هي :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

فأن :

$$det(A - \lambda I_3) = det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 5-\lambda & 3 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

فأن المعادلة المميزة للتطبيق f هي $det(A - \lambda I_3) = 0$

اي ان : $(1-\lambda)(5-\lambda)(4-\lambda) + 2(5-\lambda) = 0$

فأن : $(5-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$

اي ان : $\lambda_3 = 3$, $\lambda_2 = 2$ ، $\lambda_1 = 5$ هي قيم ذاتية للتطبيق f .

فأن الاشعة الذاتية $x = (x_1, x_2, x_3)$ المشاركة للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 5$ هي :

$$\begin{pmatrix} 1-5 & 0 & 1 \\ 0 & 5-5 & 3 \\ -2 & 0 & 4-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

من هنا فأن $x_1 = 0$ ، $x_3 = 0$ اي ان :

$$x = (0, x_2, 0) = x_2(0,1,0)$$

فأن : $V_{\lambda_1 = 5} = [(0,1,0)]$

نفس الطريقة الاشعة الذاتية $x = (x_1, x_2, x_3)$ المشاركة للقيمة الذاتية $\lambda_2 = 2$ هي :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

فأن : $x_1 = x_3$ ، $x_2 = -x_1$

اي ان : $x = (x_1, -x_1, x_1)$

$= x_1(1, -1, 1)$

فأن : $V_{\lambda_2=2} = [(1,-1,1)]$

بنفس الطريقة الاشعة الذاتية $x = (x_1, x_2, x_3)$ المشاركة للقيمة الذاتية $\lambda_3 = 3$ هي :

$$x = \left(\tfrac{1}{2}x_3, \tfrac{-3}{2}x_3, x_3\right) = \tfrac{1}{2}x_3(1, -3, 2)$$

فأن : $V_{\lambda_3=3} = [(1,-3,2)]$

فأن الاشعة الذاتية المشاركة للقيم الذاتية 5 ، 2 ، 3 هي $v_1 = (0,1,0)$ ، $v_2 = (1,-1,1)$ ، $v_3 = (1,-3,2)$. على الترتيب . نلاحظ ان v_1, v_2, v_3 مستقلة خطياً فهي اساس للفضاء $\mathbb{R}^3$.

كذلك ،

$$v_1 = (0,1,0) = 0.e_1 + 1.e_2 + 0.e_3$$

$$v_2 = (1,-1,1) = 1.e_1 + (-1)e_2 + 1.e_3$$

$$v_3 = (1,-3,2) = 1.e_1 + (-3)e_2 + 2.e_3$$

فأن مصفوفة العبور من الاساس $\{e_1, e_2, e_3\}$ الى الأساس $\{v_1, v_2, v_3\}$ هي :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

والمصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f هي :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f في الأساس $\{v_1, v_2, v_3\}$ هي :

$$D = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

نلاحظ ان D هي مصفوفة قطرية وعناصر قطرها هي القيم الذاتية 5 ، 2 ، 3 .
وهو نفس الجواب فيما لو استعملنا النظرية (3.2.5) مباشرة .

3.5 نظرية كايلي ـ هاملتون

1.3.5 نظرية .

لتكن $A \in M_n(K)$ ، $g(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$ كثيرة حدود في λ ذي العوامل من الحقل K . ولتكن :
$C(\lambda) = C_0\lambda^{n-1} + C_1\lambda^{n-2} + \dots + C_{n-1}$ كثيرة حدود من الدرجة $(n-1)$ وعواملها هي المصفوفات C_i و $C_i \in M_n(K)$
فاذا كان : $g(\lambda) I_n = (A - \lambda I_n)\, C(\lambda)$
فأن : $g(A) = 0$

البرهان :

$$(A - \lambda I_n) C(\lambda) = (A - \lambda I_n)(C_0\lambda^{n-1} + C_1\lambda^{n-2} + \dots + C_{n-2}\lambda + C_{n-1})$$

$$= AC_0\lambda^{n-1} + AC_1\lambda^{n-2} + \dots + AC_{n-2}\lambda + AC_{n-1} - C_0\lambda^n - C_1\lambda^{n-1} - \dots - C_{n-2}\lambda^2 - C_{n-1}\lambda$$

$$= AC_{n-1} + (AC_{n-2} - C_{n-1})\lambda + (AC_{n-3} - C_{n-2})\lambda^2 + \cdots + (AC_0 - C_1)\lambda^{n-1} - C_0\lambda^n$$

من هنا فأن :

$$AC_{n-1} + (AC_{n-2} - C_{n-1})\lambda + (AC_{n-3} - C_{n-2})\lambda^2 + \cdots + (AC_0 - C_1)\lambda^{n-1} - C_0\lambda^n =$$
$$= a_n I_n + a_{n-1}\lambda I_n + a_{n-2}\lambda^2 I_n + \cdots + a_1\lambda^{n-1} I_n + a_0\lambda^n I_n$$

فأن :

$$AC_{n-1} = a_n I_n$$
$$AC_{n-2} - C_{n-1} = a_{n-1} I_n$$
$$AC_{n-3} - C_{n-2} = a_{n-2} I_n$$
$$\text{-----------}$$
$$AC_0 - C_1 = a_1 I_n$$
$$-C_0 = a_0 I_n$$

نضرب المعادلة الثانية ب A والثالثة ب A^2 .... والاخيرة ب A^n ونجمعها ، فيكون لدينا :

$$a_n I_n + a_{n-1} A + \cdots + a_0 A^n = 0$$

اي ان $g(A) = 0$

(و.هـ.م.)

2.3.5 نظرية (كايلي-هاملتون) .

لتكن $A \in M_n(K)$ و $g(\lambda)$ كثيرة الحدود المميز للمصفوفة A . فأن $g(A) = 0$.

البرهان :

نلاحظ ان $adj(A - \lambda I_n)$ هي كثيرة حدود في λ ذات درجة ليست اكبر من $(n-1)$. لنفرض ان $adj(A - \lambda I_n) = C(\lambda)$.

حسب التمرين (16) في الفصل الثالث ، فأن :

$$(\det(A-\lambda I_n))I_n = (A-\lambda I_n)(\mathrm{adj}(A-\lambda I_n))$$

اي ان : $g(\lambda)\, I_n = (A-\lambda I_n)\, C(\lambda)$

فأنه حسب النظرية (1.3.5) ، $g(A)=0$.

(و. هـ. م.)

3.3.5 تعريف

لتكن $A \in M_n(K)$ ، نسمي كثيرة الحدود $h(\lambda)$ أدنى كثيرة حدود للمصفوفة A ، إذا كان العامل عند الحد ذي اعلى درجة في $h(\lambda)$ هو 1 ، وكذلك $h(\lambda)$ هي كثيرة حدود ذات اقل درجة ممكنة بحيث تكون A جذراً لها .

4.3.5 نظرية

لتكن $A \in M_n(K)$ ، $h(\lambda)$ ادنى كثيرة حدود للمصفوفة A . فأن كل كثيرة حدود والتي تكون A جذراً لها تقبل القسمة على $h(\lambda)$.

البرهان :

لتكن $f(\lambda)$ كثيرة حدود بحيث A تكون جذراً لها ، فأنه لكثيرتي الحدود $h(\lambda)$ ، $f(\lambda)$ توجد كثيرتي الحدود $r(\lambda)$ ، $q(\lambda)$ بحيث $f(\lambda)=h(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda)$ حيث $r(\lambda)=0$ أو درجة $r(\lambda)$ اقل من درجة $h(\lambda)$.

واذا كانت $r(\lambda)\neq 0$ فأن : $f(A)=h(A)q(A)+r(A)$

لكن $f(A)=0$ ، $h(A)=0$ فأن $r(A)=0$ ، اي ان

A هي جذر لكثيرة الحدود $r(\lambda)$ ذات الدرجة اقل من درجة

$h(\lambda)$ ، وهذا غير ممكن لأن $h(\lambda)$ هي ادنى كثيرة حدود

للمصفوفة A ، فأن $r(\lambda)=0$.

اي ان $f(\lambda)=h(\lambda)q(\lambda)$ ، اي ان $f(\lambda)$ تقبل

القسمة على $h(\lambda)$.

(و.هـ.م.)

5.3.5 نتيجة

لأية مصفوفة $A\in M_n(K)$ ، فأن كثيرة الحدود

المميزة للمصفوفة A تقبل القسمة على كثيرة الحدود

الدنيا للمصفوفة A .

4.5 الأشعة الذاتية والتطبيقات العمودية والأحادية.

1.4.5 نظرية

ليكن V فضاءً شعاعياً ذا بعد n على الحقل

K ، وليكن f شكلاً مزدوج الخطية ومتماثلاً على V ،

فأنه يوجد اساس في V بحيث تكون المصفوفة

المرافقة للتطبيق f بالنسبة لهذا الاساس مصفوفة قطرية .

البرهان :

اذا كان f تطبيقاً صفرياً فأن النظرية صحيحة .

وإذا كان $\dim V = 1$ فأن النظرية ايضاً صحيحة .

لنفرض ان $f \neq f_0$ وان $\dim V = n > 1$ ، ولنفرض ان النظرية صحيحة من اجل فضاء شعاعي ذي بعد $n-1$.

ليكن $v_1 \in V$ بحيث $f(v_1, v_1) \neq 0$.

وليكن U الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالشعاع v_1 ، ولتكن $W = \{ v \in V : f(v_1, v) = 0 \}$. لكل $u \in U \cap W$ فأن $u \in U$ و $u \in W$ ، فأن $u = k_1 v_1$ حيث $k_1 \in K$ ، فأن :

$$0 = f(u, u) = f(k_1 v_1, k_1 v_1) = k_1^2 f(v_1, v_1)$$

لكن $f(v_1, v_1) \neq 0$ فأن $k_1 = 0$ وبالتالي $u = k_1 v_1 = 0$

فأن $U \cap W = \{0\}$.

لكل $v \in V$ نضع

$$w = v - \frac{f(v_1, v)}{f(v_1, v_1)} v_1$$

فأن :

$$f(v_1, w) = f(v_1, v) - \frac{f(v_1, v)}{f(v_1, v_1)} f(v_1, v_1) .$$

$$= f(v_1, v) - f(v_1, v) = 0$$

فأنه من تعريف W فأن $w \in W$ ، وكذلك $\frac{f(v_1, v)}{f(v_1, v_1)} \in K$

وبذلك فأن : $v = w + \frac{f(v_1, v)}{f(v_1, v_1)} v_1 \in W + U$

اي ان :

$$V = W + U$$

فأن :

$$V = W \oplus U$$

فأنه حسب النظرية (10 . 5 . 1) $\dim V = \dim W + \dim U$

بما ان v_1 يولد U فأن : $\dim U = 1$ فأن : $\dim W = n - 1$

فأنه حسب الفرض يوجد اساس للفضاء W ولتكن $\{v_2, v_3, \dots, v_n\}$ ، بحيث المصفوفة المرافقة للتطبيق f من W في W في الأساس $\{v_2, \dots, v_n\}$ تكون قطرية، اي انه $f(v_i, v_j)=0$ لكل $i \neq j$ ، $i, j = 2, 3, \dots, n$.

بما ان $\{v_1\}$ اساس للفضاء U ، $V = W \oplus U$ ، فأنه حسب التمرين (19 في الفصل الاول) تكون $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساساً للفضاء الشعاعي V ، وكذلك $f(v_1, v_i)=0$ لكل $i=2, \dots, n$ ، فأن $f(v_i, v_j)=0$ لكل $i \neq j$ ، $i,j=1,\dots,n$ ، وبذلك فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق f في الأساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ تكون مصفوفة قطرية .

(و. هـ. م.)

2.4.5 نظرية

ليكن (H, o) فضاءً هيرميتياً ، f تطبيقاً خطياً على H ، وليكن λ قيمة ذاتية للتطبيق الخطي f فأن :-

(1) اذا كان $f^* = f^{-1}$ فأن $|\lambda| = 1$.

(2) اذا كان $f^* = f$ فأن λ قيمة حقيقية بحتة.

(3) اذا كان $f^* = -f$ فأن λ قيمة تخيلية بحتة.

البرهان :

بما ان λ قيمة ذاتية للتطبيق f ، فأنه يوجد $0 \neq v \in H$ بحيث $f(v) = \lambda v$ ، من هنا فأن $v o v \neq 0$.

(1) :- $f^*(f(v)) \, o \, v = (f(v) o f(v)) = (\lambda v o \lambda v) = \lambda \bar{\lambda} (v o v)$

$= v \circ f^{-1}(f(v)) = v \circ v$

فأن : $(\lambda\bar{\lambda} - 1)(v \circ v) = 0$

لكن $v \circ v \neq 0$ فأن : $\lambda\bar{\lambda} - 1 = 0$ اي ان : $\lambda\bar{\lambda} = 1$

فأن : $|\lambda| = 1$.

(2) $\lambda(v \circ v) = \lambda v \circ v = f(v) \circ v = v \circ f^{*}(v)$

$= v \circ f(v) = v \circ \lambda v = \bar{\lambda}(v \circ v)$

فأن : $(\lambda - \bar{\lambda})(v \circ v) = 0$

لكن $v \circ v \neq 0$ فأن : $\lambda - \bar{\lambda} = 0$ ، اي ان $\lambda = \bar{\lambda}$

وبذلك فأن λ قيمة حقيقية بحتة .

(3) $\lambda(v \circ v) = \lambda v \circ v = f(v) \circ v = v \circ f^{*}(v)$

$= v \circ (-f(v)) = v \circ (-\lambda v) = -\bar{\lambda}(v \circ v)$

فأن : $(\lambda + \bar{\lambda})(v \circ v) = 0$

لكن $v \circ v \neq 0$ ، فأن $\lambda + \bar{\lambda} = 0$ ، اي ان $\bar{\lambda} = -\lambda$

ومنه λ قيمة تخيلية بحتة .

(و . هـ . م .)

3 . 4 . 5 نتيجة

إذا كان $(E, \circ)$ فضاءً اقليدياً ، f تطبيقاً خطياً على E بحيث $f = f^{*}$ فأن :

(1) إذا كان λ قيمة ذاتية للتطبيق f ، فأن λ قيمة حقيقية بحتة .

(2) كثيرة الحدود المميز $g(\lambda)$ للتطبيق f هي حاصل ضرب كثيرات حدود خطية .

(3) توجد اشعة ذاتية للتطبيق f .

(4) الاشعة الذاتية المشاركة للقيم الذاتية المختلفة متعامدة .

البرهان :

(1) مباشرة حسب النظرية السابقة من (2) .

(2) حسب (1) فأن القيم الذاتية للتطبيق f تكون حقيقية بحتة ، اي ان كثيرة الحدود المميز $g(\lambda)$ هي حاصل ضرب كثيرات حدود خطية .

(3) من (2) مباشرة .

(4) لنفرض ان λ_1 , λ_2 قيمتان ذاتيتان مختلفتان للتطبيق f ، ولنفرض ان v_1 , v_2 شعاعان ذاتيان مشاركان لهما على التوالي ، فأن $f(v_1)=\lambda_1 v_1$ ، $f(v_2)=\lambda_2 v_2$ وحيث ان $f=f^*$ فأن :

$$\lambda_1(v_1 \circ v_2) = \lambda_1 v_1 \circ v_2 = f(v_1)\circ v_2 = v_1 \circ f^*(v_2) = v_1 \circ f(v_2)$$

$$= v_1 \circ \lambda_2 v_2 = \lambda_2 (v_1 \circ v_2)$$

فأن : $(\lambda_1 - \lambda_2)(v_1 \circ v_2) = 0$

لكن $\lambda_1 \neq \lambda_2$ فأن $v_1 \circ v_2 = 0$ ، ومنه فأن v_1 ، v_2 متعامدان .

(و. هـ. م.)

4.4.5 نظرية

ليكن $(E,\circ)$ فضاءاً أقليدياً ، f تطبيقاً خطياً على E بحيث $f=f^*$. فأنه عندئذ توجد اساس معياري

متعامد للفضاء E متكون من الاشعة الذاتية للتطبيق f .

البرهان :

اذا كان $\dim E = 1$ فأن النظرية صحيحة .

لنفرض ان $\dim E = n > 1$ فأنه يوجد شعاع ذاتي $0 \neq v_1 \in E$ للتطبيق f .

لنفرض ان النظرية صحيحة من اجل فضاء شعاعي ذا بعد $(n-1)$.

ليكن E_1 فضاءً شعاعياً جزئياً مولداً بالشعاع v_1،

وليكن $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ ، فأن $u_1 \in E_1$ شعاع معياري،

حسب النظرية (7.4.4) فأن : $E = E_1 \oplus E_1^{\perp}$.

فأن : $\dim E = \dim E_1 + \dim E_1^{\perp}$ اي ان : $\dim E_1^{\perp} = n-1$.

من الفرضية فأنه يوجد اساس معياري متعامد في E_1،

ولتكن $\{u_2, \dots, u_n\}$ متكونة من الاشعة الذاتية

للتطبيق f . لكن u_1 معياري وكذلك $u_1 \circ u_i = 0$ لكل

$i = 2, \dots, n$ ، فأن المجموعة $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ هي اساس معياري

متعامد متكونة من الاشعة الذاتية للتطبيق f .

(و. هـ. م.)

5.4.5 نتيجة

ليكن $(E, \circ)$ فضاءً أقليدياً ، f تطبيقاً خطياً

على E يحقق $f = f^*$. فأنه يوجد اساس معياري متعامد

في E ، بحيث ان المصفوفة المرافقة للتطبيق f في تلك

الاساس مصفوفة قطرية .

بطريقة مشابهة لبرهان النظرية (4.4.5)، نبرهن النظرية التالية .

6.4.5 نظرية

ليكن $(H, \circ)$ فضاءً هيرميتياً ، f تطبيقاً احادياً على H . فأنه يوجد اساس معياري متعامد في H متكون من الأشعة الذاتية للتطبيق f . وتكون مصفوفة f في هذا الاساس مصفوفة قطرية .

5.5 صيغ جوردان القانونية

1.5.5 تعريف

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، f تطبيقاً خطياً من V في V و V_1 فضاءً شعاعياً جزئياً من V . نقول ان الفضاء الشعاعي الجزئي V_1 متميز اذا كان $f(V_1) \subseteq V_1$.

2.5.5 نظرية

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، f تطبيقاً خطياً من V في V ، V_1 فضاءً شعاعياً جزئياً متميزاً من V . فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق f هي من الشكل $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$، حيث A هي المصفوفة المرافقة لمقصور f الى V_1 .

البرهان :

لنرمز لمقصور التطبيق f الى V_1 بالرمز f_1 .

لتكن $\{u_1,\dots,u_r\}$ اساسا في V_1 . نكمل هذا الاساس الى اساس للفضاء V . ولتكن $\{u_1,\dots,u_r,v_1,\dots,v_s\}$ اساسا للفضاء V . بما ان V_1 متميز في V فأن $f(u_1),\dots,f(u_r)\in V_1$ ، فأن :

$$f_1(u_1) = f(u_1) = a_{11}u_1 + \dots + a_{r1}u_r + 0.v_1 + \dots + 0.v_s$$
$$f_1(u_2) = f(u_2) = a_{12}u_1 + \dots + a_{r2}u_r + 0.v_1 + \dots + 0.v_s$$
$$\dots\dots\dots$$
$$f_1(u_r) = f(u_r) = a_{1r}u_1 + \dots + a_{rr}u_r + 0.v_1 + \dots + 0.v_s$$

$$f(v_1) = b_{11}u_1 + \dots + b_{r1}u_r + c_{11}v_1 + \dots + c_{s1}v_s$$
$$f(v_2) = b_{12}u_1 + \dots + b_{r2}u_r + c_{12}v_1 + \dots + c_{s2}v_s$$
$$\dots\dots\dots$$
$$f(v_s) = b_{1s}u_1 + \dots + b_{rs}u_r + c_{1s}v_1 + \dots + c_{ss}v_s$$

فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق f هي :

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ \dots & & & & & & & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rs} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ \dots & & & & & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{s1} & c_{s2} & \dots & c_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} .$$

حيث A هي المصفوفة المرافقة لمقصور f الى V_1 .

3.5.5 نظرية

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، وليكن f تطبيقاً خطياً من V في V ، وليكن $V_1, ---, V_m$ فضاءات شعاعية جزئية متميزة في V بحيث :
$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ ، ولتكن A_i المصفوفة المرافقة لمقصور f الى V_i لكل $i = 1, \ldots, m$. فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق f هي :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{pmatrix}.$$

البرهان :

لتكن $\{u_{11}, \ldots, u_{n_1 1}\}$ اساساً لـ V_1.

- - - - - - - - - - - - - - - - -

$\{u_{1m}, \ldots, u_{n_m m}\}$ اساساً لـ V_m.

بما أن : $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ فأن :
المجموعة $\{u_{11}, \ldots, u_{n_1 1}, u_{1m}, \ldots, u_{n_m m}\}$ عبارة عن أساس في V .

نرمز لمقصور f الى V_i بالرمز f_i لكل $i = 1, \ldots, m$.

$$f_1(u_{11}) = f(u_{11}) = a_{11} u_{11} + \cdots + a_{n_1 1} u_{n_1 1} + 0 \cdot u_{12} + \cdots + 0 \cdot u_{n_m m}$$

$$f_1(u_{21}) = f(u_{21}) = a_{12} u_{11} + \cdots + a_{n_1 2} u_{n_1 1} + 0 \cdot u_{12} + \cdots + 0 \cdot u_{n_m m}$$

- -

$$f_1(u_{n_1 1}) = f(u_{n_1 1}) = a_{1 n_1} u_{11} + \cdots + a_{n_1 n_1} u_{n_1 1} + 0 \cdot u_{12} + \cdots + 0 \cdot u_{n_m m}.$$

$$f_2(u_{12}) = f(u_{12}) = 0.u_{11} + \cdots + 0.u_{n_1 1} + c_{11}u_{12} + \cdots + c_{n_2 1}u_{n_2 2} + 0.u_{13} + \cdots + 0.u_{n_m m}$$

$$f_2(u_{n_2 2}) = f(u_{n_2 2}) = 0.u_{11} + \cdots + 0.u_{n_1 1} + c_{1n_2}u_{12} + \cdots + c_{n_2 n_2}u_{n_2 2} + 0.u_{13} + \cdots + 0.u_{n_m m}$$

$$f_m(u_{1m}) = f(u_{1m}) = 0.u_{11} + \cdots + k_{11}u_{1m} + \cdots + k_{n_m 1}u_{n_m m}$$

$$f_m(u_{n_m m}) = f(u_{n_m m}) = 0.u_{11} + \cdots + k_{1n_m}u_{1m} + \cdots + k_{n_m n_m}u_{n_m m}$$

فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق f هي :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n_1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & & & & \\ a_{n_1 1} & a_{n_1 2} & \cdots & a_{n_1 n_1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1n_2} & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n_2 1} & \cdots & c_{n_2 n_2} & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & & & & \\ \cdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{11} \cdots & k_{1n_m} \\ \cdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{n_m 1} \cdots & k_{n_m n_m} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{pmatrix}$$

(و . هـ . م)

4.5.5 تعريف

إذا كانت $M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{pmatrix}$ مصفوفة كما

في النظرية (3.5.5)، فنقول أن M هو المجموع المباشر

للمصفوفات A_i، ونكتب : $M = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_m$.

5.5.5 صيغة جوردان القانونية

نسمي المصفوفة

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

بقالب جوردان ونرمز لها بالرمز $J(\lambda ; n)$.

إذا كان $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_p$ بحيث $n = \sum_{i=1}^{p} n_i$ فأن :

$$J(\lambda ; n_1, n_2, \ldots, n_p) = J(\lambda ; n_1) \oplus \cdots \oplus J(\lambda ; n_p) \in M_n(K)$$

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K، f تطبيقاً خطياً من V في V، ولتكن M المصفوفة المرافقة للتطبيق f في أساس معين. فإذا كانت :

$$M = J(\lambda_1 ; k_1^{(1)}, \ldots, k_{p_1}^{(1)}) \oplus J(\lambda_2 ; k_1^{(2)}, \ldots, k_{p_2}^{(2)}) \oplus \cdots \oplus J(\lambda_m , k_1^{(m)}, \ldots, k_{p_m}^{(m)})$$

حيث :

(1) $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ هي قيم ذاتية للتطبيق الخطي f.

(2) $k_1^{(i)} + \cdots + k_{p_i}^{(i)} = n_i$ حيث n_i هي عدد تكرار القيم الذاتية λ_i

في كثيرة الحدود المميز $g(\lambda)$ للتطبيق f.

(3) إذا كانت في كثيرة الحدود الدنيا للمصفوفة M تكرار λ_i هي من الدرجة m_i، فإنه تكون احدى قوالب جوردان على الاقل من الدرجة m_i، والقوالب الباقية هي من الدرجة اقل أو تساوي m_i.

نقول عندئذ ان للمصفوفة M صيغة جوردان القانونية.

6.5.5 أمثلة

(1)

$$J(5;4) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(2)

$$J(7;2,1) = J(7;2) \oplus J(7;1)$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \oplus (7) = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(3) اكتب صيغ جوردان القانونية للمصفوفة A المرافقة للتطبيق الخطي f الذي كثيرة حدوده المميزة هي: $g(\lambda) = (2-\lambda)^4 (3-\lambda)^3$ وكثيرة حدوده الدنيا: $h(\lambda) = (2-\lambda)^2 (3-\lambda)^2$.

من التعريف نلاحظ ان $\lambda_1 = 2$، $\lambda_2 = 3$ تكرار λ_1 هو 4، وتكرار λ_2 هو 3 في كثيرة الحدود المميزة.

في كثيرة الحدود الدنيا تكرار λ_1 هو 2، وتكرار λ_2 هو 2.

فان صيغ جوردان القانونية هي إما :

$$M = J(2;2) \oplus J(2;1) \oplus J(2;1) \oplus J(3;2) \oplus J(3;1)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \oplus (2) \oplus (2) \oplus \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \oplus (3)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ 0 & 2 & & & & 0 & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 3 & 1 & \\ & 0 & & & 0 & 3 & \\ & & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

أو هو :

$$M = J(2;2) \oplus J(2;2) \oplus J(3;2) \oplus J(3;1)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \oplus (3)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ 0 & 2 & & & & 0 & \\ & & 2 & 1 & & & \\ & & 0 & 2 & & & \\ & & & & 3 & 1 & \\ & 0 & & & 0 & 3 & \\ & & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

تمـــارين

(1) برهن ان صفر هو قيمـــة ذاتيـــة للتطبيق الخطي $f \Leftrightarrow f$ غير متباين .

(2) اذا كان λ قيمـــة ذاتيـــة للتطبيق الخطي المتقابل f ، فبرهن ان λ^{-1} هو قيمـــة ذاتيـــة لـ f^{-1} .

(3) في كل الحالات الآتيـــة اوجد المصفوفة A المرافقـــة للتطبيق f ، ثم حول المصفوفة هذه الى مصفوفة قطرية ان امكن .

(a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ معرفاً بـ $f(x_1, x_2) = (-2x_2, 2x_1)$

(b) $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ معرفاً بـ $f(x_1, x_2) = (-2x_2, 2x_1)$

حيث $\mathbb{R}^2$ هو فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{C}^2$ هو فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{C}$.

(4) لتكن

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} ، \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

اي من المصفوفتين A ، B يمكن جعلها قطرية ؟ .

(5) لتكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، f تطبيقاً خطياً من V في V ، و V_1 فضاءاً شعاعياً جزئياً متميزاً في V ،

برهن أن $V_1^{\perp}$ هو ايضاً متميز في V .

(6) ليكن $\mathbb{R}^2$ فضاءاً شعاعياً على الحقل $\mathbb{R}$ ، f تطبيقاً خطياً من $\mathbb{R}^2$ في $\mathbb{R}^2$ معرفاً كالآتي :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad f(x_1, x_2) = (2x_1 \, , \, x_1 + 3x_2)$$

وليكن :

$$V_2 = \{ (x_1, x_2) : x_1 = 0 \} \quad , \quad V_1 = \{ (x_1, x_2) : x_2 = 0 \}$$

فضاءين شعاعيين جزئيين في $\mathbb{R}^2$. اي من V_1 ، V_2 هو فضاء شعاعي جزئي متميز في $\mathbb{R}^2$ ؟ .

(7) ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، f تطبيقاً خطياً من V في V . برهن انه ليوجد لـ V فضاء شعاعي جزئي متميز ذات لبعد واحد $\Leftrightarrow$ ليوجد قيم ذاتية لـ f .

(8) ليكن f تطبيقاً خطياً من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ على الحقل $\mathbb{R}$ في نفسه معرفاً كالآتي :

$$f(x_1, x_2) = (x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha \, , \, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha)$$

حيث $0 < \alpha < \pi$.

برهن انه لا يوجد لـ $\mathbb{R}^2$ فضاء شعاعي جزئي متميز ماعدا $\{0\}$ ، $\mathbb{R}^2$.

(9) لتكن $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ ، أوجد لنرة حدود بحيث تكون A جذراً لها .

(10) اوجد أدنى كثيرة حدود $h(\lambda)$ للمصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(11) اوجد كثيرة الحدود الدنيا والمميزة للتطبيق الخطي $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ المعرف بـ: $f(x,y) = (x+y, y)$.

(12) اوجد جميع صيغ جوردان القانونية للمصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(13) اوجد جميع صيغ جوردان القانونية الممكنة لتلك المصفوفات التي كثيرة حدودها المميزة $g(\lambda)$ ، وكثيرة حدودها الدنيا $h(\lambda)$ ، في كل من الحالتين :

(a) $h(\lambda) = (7-\lambda)^2$ ، $g(\lambda) = (7-\lambda)^5$

(b) $g(\lambda) = (3-\lambda)^4 (5-\lambda)^4$ ، $h(\lambda) = (3-\lambda)^2 (5-\lambda)^2$

(14) اوجد جميع صيغ جوردان القانونية الممكنة لـ :
$J(\lambda; k_1, k_2, k_3) \in M_3(K)$.

(15) ليكن $(H, \circ)$ فضاءً هيرميتياً ، f تطبيقاً احادياً على

H ، λ قيمة ذاتية لـ f .

(a) برهن ان $(f-\lambda Id_H)$ تطبيق احادي .

(b) برهن ان كل شعاع ذاتي للتطبيق f هو شعاع ذاتي للتطبيق f^* .

(c) برهن ان الاشعة الذاتية المشاركة لقيم ذاتية مختلفة متعامدة .

(16) ليكن V فضاء شعاعياً على الحقل K ، وليكن f تطبيقاً خطياً من V في V و $v \in V$. نفرض ان f يحقق $f^k(v)=0$ ، $f^{k-1}(v) \neq 0$ حيث $k \in N$.

(a) برهن ان المجموعة $S=\{v, f(v), \dots, f^{k-1}(v)\}$ مجموعة مستقلة خطياً .

(b) برهن ان الفضاء الشعاعي الجزئي V_1 المولد بـ S متميز في V .

(c) برهن ان مقصور f الى V_1 والذي نرمز له بـ f_1 ، يحقق : $f_1^k(v)=0$ ، $f_1^{k-1}(v) \neq 0$.

(d) برهن ان المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f في الأساس $\{v, f(v), \dots, f^{k-1}(v)\}$ للفضاء V_1 هي من الشكل :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

الفصل السادس
الفضاء الترابطي

1.6 مبادئ أولية

1.1.6 تعريف

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، ولتكن T مجموعة غير خالية . إذا وجد التطبيق ω من $T \times T$ في V، يحقق الشروط التالية :

(1) لكل $a \in T$ ولكل $v \in V$ يوجد $b \in T$ وحيد بحيث $\omega(a,b) = v$.

(2) لكل $a,b,c \in T$ ، $\omega(a,b) + \omega(b,c) = \omega(a,c)$

نقول عندئذ ان T فضاء ترابطي مرتبط بالفضاء الشعاعي V. ونرمز أحياناً للفضاء الترابطي من هذا النوع بالرمز (T, V, ω) ، وسنعتبر V فضاء شعاعي على الحقل K دائماً في هذا الفصل . احياناً نكتفي بكتابة T كرمز للفضاء الترابطي . نسمي عناصر T بنقاط الفضاء الترابطي ، وعناصر V بالأشعة ، ونسمي التطبيق ω بخريطة الفضاء الترابطي . بعد الفضاء الترابطي هو بعد الفضاء الشعاعي المرتبط به، ونرمز له بالرمز $\dim(T)$.

نلاحظ انه لكل $a \in T$ $\omega(a,a) = 0_V$ لأنه حسب الشرط (2) من التعريف :

$$\omega(a,a) + \omega(a,a) = \omega(a,a)$$

فأن : $\omega(a,a) = 0_V$.

من هنا ومن الشرط (٢) من التعريف نستنتج انه لكل $a, b \in T$

$$\omega(a,b) + \omega(b,a) = \omega(a,a) = 0_V$$

فأن : $\omega(a,b) = -\omega(b,a)$.

2.1.6 مثال

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K . لنأخذ المجموعة V والتطبيق $\omega : V \times V \to V$ المعرف بالشكل :-

$$\forall (a,b) \in V \times V \; ; \; \omega(a,b) = a - b$$

فأنه لكل $a \in V$ ولكل $v \in V$ يوجد $b \in V$ وحيد، بحيث

$$\omega(a,b) = a - b = v$$

وكذلك لكل $a, b, c \in V$ فأن :

$$\omega(a,b) + \omega(b,c) = (a-b) + (b-c) = a - c = \omega(a,c)$$

ومنه، فأن (V, V, ω) فضاء ترابطي .

3.1.6 تعريف

ليكن T فضاءاً ترابطياً ، لكل $a \in T$ ولكل $v \in V$ فأنه حسب (1.1.6) يوجد $b \in T$ وحيد ، بحيث ان $\omega(a,b) = v$. النقطة b تسمى بحاصل جمع النقطة a والشعاع v ونرمز لها بالرمز $a + v$. حاصل جمع النقطة a والشعاع $-v$ نرمز لها بالرمز $a - v$ ، ونقول انها حاصل طرح النقطة a والشعاع v.

من هذا التعريف نستنتج انه لكل $a \in T$ ولكل $v \in V$:

$$\omega(a, a+v) = v$$

وكذلك لكل $v_1, v_2 \in V$ ، ولكل $a \in T$ فأن :

$$\omega(a+v_1, a+v_2) = \omega(a+v_1, a) + \omega(a, a+v_2)$$
$$= \omega(a, a+v_2) - \omega(a, a+v_1) = v_2 - v_1$$

4.1.6 نظرية

ليكن T فضاءاً ترابطياً ، لكل $v_1, v_2 \in V$ ولكل $a, b \in T$ فأن :

(1) اذا كان $a+v_1 = b+v_1$ فأن : $a=b$. واذا كان $a+v_1 = a+v_2$ فأن : $v_1 = v_2$.

(2) $a+v_1 = b \iff \omega(a,b) = v_1$

بشكل خاص $a+v_1 = a \iff v_1 = 0_V$.

(3) $(a+v_1)+v_2 = a+(v_1+v_2)$

البرهان :

(1) اذا كان $a+v_1 = b+v_1$ فأن :

$$\omega(a+v_1, a) = -\omega(a, a+v_1) = -v_1 = -\omega(b, b+v_1) =$$
$$= \omega(b+v_1, b) = \omega(a+v_1, b)$$

حسب التعريف (1.1.6) فأن : $a = b$.

وكذلك اذا كان $a+v_1 = a+v_2$ ، فأن :

$$v_1 = \omega(a, a+v_1) = \omega(a, a+v_2) = v_2$$

(2) ينتج البرهان مباشرة من تعريف $a+v_1$ ومن التعريف (1.1.6) .

بشكل خاص إذا كان $a=b$ ، بما ان $\omega(a,a)=0_V$ فأن
$a+v=a \iff v=0$.

(3) لنفرض ان $a+v_1=a_1$ وان $(a+v_1)+v_2=a_2$ فأن :

$$\omega(a,a_1)=v_1 \quad , \quad \omega(a_1,a_2)=v_2$$

من هنا وحسب (1.1.6) فأن :

$$v_1+v_2=\omega(a,a_1)+\omega(a_1,a_2)=\omega(a,a_2)$$

فأذا فرضنا ان $\omega(a,a_2)=v_3$ فأن $a+v_3=a_2$ ومنه

$$a+\omega(a,a_2)=a_2$$

فأن :

$$a+(v_1+v_2)=a+\omega(a,a_2)=a_2=(a+v_1)+v_2$$

(و.هـ.م.)

2.6 الفضاء الترابطي الجزئي

ليكن T فضاءاً ترابطياً مرتبطاً بالفضاء الشعاعي V ، ولتكن T_1 مجموعة جزئية غير خالية من T ، V_1 مجموعة جزئية من V . فأن T_1+V_1 هي مجموعة جميع العناصر $a+v$ لكل $a\in T_1$ ، $v\in V_1$.

إذا كانت $T_1=\{a\}$ فأننا نكتب $a+V_1$ وإذا كانت $V_1=\{v\}$ عندئذ نكتب T_1+v .

إذا كانت T_1 ، T_2 مجموعتين جزئيتين من T ، فأن $\omega(T_1,T_2)$ هي مجموعة جميع الاشعة $\omega(a,b)$ لكل $a\in T_1$ و $b\in T_2$.

إذا كانت $T_1=\{a\}$ مثلاً ، عندئذ نكتب $\omega(a,T_2)$.

من هنا يبرهن بسهولة انه لكل $a, b \in T$ ، فأن :

$$\omega(a,b) + \omega(b, T_1) = \omega(a, T_1) \qquad (1)$$

$$\omega(a, b+V_1) = \omega(a,b) + V_1 \qquad (2)$$

$$a + \omega(a, T_1) = T_1 \qquad (3)$$

1.2.6 نظرية

ليكن T فضاءاً ترابطياً ولتكن $\{a_i\}_{i\in I}$ مجموعة نقاط في T ، $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ مقادير سلمية من الحقل K بحيث ان $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$. لأي نقطة $a \in T$ ، فأن المجموع : $a + \sum_{i\in I} \lambda_i \omega(a, a_i)$ لا يعتمد على اختيار النقطة a .

البرهان :

لتكن a' أي نقطة اخرى في T ، فأن :

$$a' + \sum_{i\in I} \lambda_i \omega(a', a_i) = a' + \sum_{i\in I} \lambda_i (\omega(a', a) + \omega(a, a_i))$$

$$= a' + (\sum_{i\in I} \lambda_i)\, \omega(a', a) + \sum_{i\in I} \lambda_i \omega(a, a_i)$$

$$= a' + \omega(a', a) + \sum_{i\in I} \lambda_i \omega(a, a_i)$$

$$= a + \sum_{i\in I} \lambda_i\, \omega(a, a_i)$$

وبذلك فأن المجموع $a + \sum_{i\in I} \lambda_i \omega(a, a_i)$ لا يعتمد على اختيار النقطة a .

(و. هـ. م.)

2.2.6 تعريف

ليكن T فضاءً ترابطياً، ولتكن $\{a_i\}_{i\in I}$ مجموعة نقاط من T ، $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ مقادير سلمية من الحقل K بحيث ان $\sum_{i\in I}\lambda_i = 1$. نسمي المجموعة $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ بمجموعة ثقل، وتسمى النقطة $a + \sum_{i\in I}\lambda_i\, \omega(a,a_i)$ مركز ثقل مجموعة النقاط $\{a_i\}_{i\in I}$ ذي الثقل $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ لأية نقطة $a\in T$.

نرمز لمركز ثقل مجموعة النقاط $\{a_i\}_{i\in I}$ ذي الثقل $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ بالرمز $\sum_{i\in I}\lambda_i a_i$. نسمي النقطة b بمركز ثقل المجموعة $\{a_i\}_{i\in I}$ إذا وجدت مجموعة ثقل $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ ، بحيث ان $b = \sum_{i\in I}\lambda_i a_i$.

3.2.6 تعريف

ليكن T فضاءً ترابطياً ، ولتكن T_1 مجموعة جزئية غير خالية من T ، فأذا كانت لكل مجموعة من النقاط $\{a_i\}_{i\in I}$ من T_1 ، ولكل مجموعة مقادير سلمية $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ فأن مركز الثقل $\sum_{i\in I}\lambda_i a_i$ هو عنصر من T_1 . نقول عندئذ ان T_1 هو فضاء ترابطي جزئي من T .

4.2.6 نظرية

ليكن T فضاءً ترابطياً ، T_1 مجموعة جزئية غير خالية من T فأن الشروط التالية متكافئة :

(١) T_1 هو فضاء ترابطي جزئي من T .

(٢) لكل $a \in T_1$ فأن المجموعة $\omega(a, T_1)$ هي فضاء شعاعي جزئي من V .

البرهان :

(١) ← (٢)

لتكن a نقطة من T ، لكل $v_1, v_2 \in \omega(a, T_1)$ فأن :

$v_1 = \omega(a, a_1)$ ، $v_2 = \omega(a, a_2)$ ، حيث $a_1, a_2 \in T_1$.

فأن :

$$a + (v_1 + v_2) = a + \big((-1)\,\omega(a, a) + \omega(a, a_1) + \omega(a, a_2)\big)$$

فأنه حسب $(2.2.6)$ ، $(3.2.6)$:

$$a + (v_1 + v_2) = (-1)\,a + 1.a_1 + 1.a_2 \in T_1$$

فأن : $a + (v_1 + v_2) = c \in T_1$ وأن :

$$v_1 + v_2 = \omega(a, c) \in \omega(a, T_1)$$

لكل $\lambda \in K$ فأن :

$$a + \lambda v_1 = a + \big((1-\lambda)\,\omega(a, a) + \lambda\,\omega(a, a_1)\big)$$

$$= (1-\lambda)\,a + \lambda a_1 \in T_1$$

فأن : $a + \lambda v_1 = c \in T_1$

فأن : $\lambda v_1 = \omega(a, c) \in \omega(a, T_1)$

ومنه $\omega(a, T_1)$ هي فضاء شعاعي جزئي من V .

(٢) ← (١)

لنفرض ان المجموعة $\omega(a, T_1)$ هي فضاء شعاعي جزئي من V حيث $a \in T_1$ ، ولتكن $\{a_i\}_{i \in I}$ مجموعة من نقاط المجموعة

T_1 فأنه لأي مجموعة ثقل $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ فأن :

$$\sum_{i\in I} \lambda_i a_i = a + \sum_{i\in I} \lambda_i \omega(a, a_i)$$

وحيث ان $\omega(a,a_i) \in \omega(a, T_1)$ لكل $i \in I$. من الفرضية

فأن: $\sum_{i\in I} \lambda_i \omega(a, a_i) \in \omega(a, T_1)$ ، فأن $\sum_{i\in I} a_i \lambda_i \in T_1$.

بهذا فأن T_1 فضاء ترابطي جزئي من T .

(و.هـ.م.)

5.2.6 نظرية

ليكن T فضاءاً ترابطياً ، T_1 مجموعة جزئية غير خالية و $a \in T_1$ فأن T_1 هو فضاء ترابطي جزئي من T $\Leftrightarrow$ يوجد فضاء شعاعي جزئي V_1 من V بحيث ان $T_1 = a + V_1$.

البرهان :

نفرض ان T_1 هو فضاء ترابطي جزئي من T ، فأنه حسب النظرية (4.2.6) ، $\omega(a, T_1)$ هو فضاء شعاعي جزئي من V . لكل $b \in T_1$ فأن $b = a + \omega(a,b)$.

لكن $\omega(a,b) \in \omega(a, T_1)$ فأن $b \in a + \omega(a, T_1)$.

بنفس الطريقة لكل $x \in a + \omega(a, T_1)$ فأن: $x = a + \omega(a,c)$ حيث $c \in T_1$. فأن $c = a + \omega(a,c)$. فأن $x \in T_1$

وبذلك فأن $T_1 = a + \omega(a, T_1)$. اي انه يوجد فضاء شعاعي جزئي $V_1 = \omega(a, T_1)$ من الفضاء V بحيث $T_1 = a + V_1$.

لنفرض الآن انه يوجد فضاء شعاعي جزئي V_1 من الفضاء V بحيث $T_1 = a + V_1$ فأن : $\omega(a, T_1) = \omega(a, a + V_1)$

لكل $x \in \omega(a, a+V_1)$ فأن $x = \omega(a, a+v)$ حيث $v \in V_1$.

فأن : $x = \omega(a, a+v) = v \in V_1$ ، وكذلك لكل $v \in V_1$

فأنه يوجد $b \in T_1$ بحيث $a + \omega(a,b) = b$.

لكن $T_1 = a + V_1$ ، فأن : $b = a + v$ حيث $v \in V_1$.

فأن : $a + \omega(a, a+v) = a + v$ ومنه $\omega(a, a+v) = v$

بهذا فأن: $v \in \omega(a, a+V_1)$.

وبذلك فأن: $V_1 = \omega(a, a+V_1)$ ، ومنه $\omega(a, T_1) = V_1$ ، وهي فضاء شعاعي جزئي من V .

ومن هنا فأن T_1 هي فضاء ترابطي جزئي من T .

(و. هـ. م.)

من هنا نستنتج ان كل فضاء ترابطي جزئي T_1 من الفضاء الترابطي T مرتبط بفضاء شعاعي جزئي V_1 من الفضاء الشعاعي V ، بحيث ان (T_1, V_1, ω) هو نفسه فضاء ترابطي ، وان $T_1 = a + V_1$ لـ $a \in T_1$.

6.2.6 تعريف

ليكن (T_1, V_1, ω) ، (T_2, V_2, ω) فضاءين ترابطيين جزئيين من الفضاء الترابطي (T, V, ω) . نقول ان T_1 موازي لـ T_2 ونكتب $T_1 // T_2$ اذا كان $V_1 = V_2$.

7.2.6 نظرية

ليكن (T, V, ω) فضاءاً ترابطياً ، وليكن V_1 فضاءاً

شعاعياً جزئياً من V ، T_1 مجموعة جزئية من T ،

$a,b\in T$ فأنه :

(1) إذا كان $\omega(a,b)\notin V_1$ فأن : $(a+V_1)\cap(b+V_1)=\phi$

(2) إذا كان $\omega(a,b)\in V_1$ فأن : $a+V_1=b+V_1$

البرهان :

(1) لنفرض ان $\omega(a,b)\notin V_1$ ولنفرض ان $(a+V_1)\cap(b+V_1)\neq\phi$

فأنه يوجد $c\in(a+V_1)\cap(b+V_1)$ فأن :

$c=a+v_1$ ، $c=b+v_2$ لـ $v_1,v_2\in V_1$ فأن :

$a+v_1=b+v_2$ اي ان $b=a+(v_1-v_2)$

من هنا فأن : $\omega(a,b)=\omega(a,a+(v_1-v_2))=v_1-v_2\in V_1$

وهذا يخالف الفرض ان $\omega(a,b)\notin V_1$ فأن :

$$(a+V_1)\cap(b+V_1)=\phi$$

(2) ليكن $\omega(a,b)\in V_1$ ، $v\in V_1$ فأن $v_2=(\omega(a,b)+v)\in V_1$

وكذلك $\omega(a,a+v)=v$.

فأن : $\omega(a,a+v_2)=\omega(a,a+(\omega(a,b)+v))=\omega(a,b+v)$

فأن : $a+v_2=b+v$

من هنا بسهولة نبرهن أن : $a+V_1=b+V_1$

(و.هـ.م.)

8.2.6 نتيجة

إذا كان (T_1,V_1,ω) ، (T_2,V_2,ω) فضاءين ترابطيين جزئيين من الفضاء الترابطي (T,V,ω) ، فأنه إذا كان $T_1//T_2$ فأن $T_1=T_2$ أو $T_1\cap T_2=\phi$.

9.2.6 نظرية (نظرية أفليرس).

لكل فضاء ترابطي جزئي (T_1, V_1, ω) من الفضاء الترابطي (T, V, ω) ولكل نقطة $a \in T$، يوجد فضاء ترابطي جزئي واحد فقط والذي يحوي a، ويكون موازياً للفضاء الترابطي الجزئي T_1.

البرهان:

نأخذ الفضاء الترابطي الجزئي $(a + V_1, V_1, \omega)$ فأن:

$a = a + 0_V \in a + V_1$ وكذلك، $\dim(a + V_1) = \dim T_1 = \dim V_1$

فأن: $a + V_1 = T_2$ فضاء ترابطي جزئي موازي للفضاء الترابطي T_1 ويحوي a، وهو وحيد.

(و.هـ.م.)

10.2.6 نظرية

تقاطع مجموعة من الفضاءات الترابطية الجزئية هي مجموعة خالية، أو فضاء ترابطي جزئي.

البرهان:

ليكن $\{(T_i, V_i, \omega)\}_{i \in I}$ مجموعة من الفضاءات الترابطية الجزئية من الفضاء الترابطي (T, V, ω).

لنفرض ان $\bigcap_{i \in I} T_i \neq \emptyset$، فأنه يوجد $a \in \bigcap_{i \in I} T_i$، فأن $a \in T_i$ لكل $i \in I$.

بذلك فأن $T_i = a + V_i$ لكل $i \in I$.

من هنا نلاحظ ان:

$$(b \in \bigcap_{i \in I} T_i) \Leftrightarrow (\forall i \in I \; b \in T_i) \Leftrightarrow (\forall i \in I \; b \in a + V_i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall i \in I \ , \ b = a + v \ , \ v \in V_i) \Leftrightarrow (b \in a + \bigcap_{i \in I} V_i)$$

وبذلك فأن :

$$\bigcap_{i \in I} T_i = a + \bigcap_{i \in I} V_i$$

فأن :

$(\bigcap_{i \in I} T_i \ , \ \bigcap_{i \in I} V_i \ , \ \omega)$ هو فضاء ترابطي جزئي من الفضاء الترابطي (T, V, ω) .

(و.هـ.م.)

3.6 التطبيقات الترابطية

1.3.6 تعريف

ليكن (T_1, V_1, ω_1) ، (T_2, V_2, ω_2) فضاءين ترابطيين.
نسمي التطبيق $f : T_1 \to T_2$ تطبيقاً ترابطياً إذا وجد تطبيق خطي $h : V_1 \to V_2$ بحيث :
لكل $a \in T_1$ ولكل $v \in V_1$ ، $f(a+v) = f(a) + h(v)$
ويسمى h في هذه الحالة بالتطبيق الخطي المرتبط بـ f .

2.3.6 نظرية

كل تطبيق ترابطي يحدد بواسطة صورة نقطة والتطبيق الخطي المرتبط به .

البرهان :

ليكن f تطبيقاً ترابطياً من T_1 في T_2 . وليكن $a \in T_1$ ، ولنفرض ان $f(a) = b$ حيث $b \in T_2$.

وليكن h تطبيقاً خطياً مرتبطاً ب f . لكل $c \in T_1$ فأن

$$c = a + \omega(a, c)$$

اي ان : $f(c) = f(a) + h(\omega(a, c))$

وبذلك فأن: $f(c) = b + h(\omega(a, c))$

فأن f محدد بواسطة النقطة b والتي هي صورة النقطة a والتطبيق الخطي المرتبط به h .

ليكن f تطبيقاً من T_1 في T_2 معرفاً بالشكل التالي :

$$\forall c \in T_1 , \; f(c) = b + h(\omega(a, c))$$

نبرهن ان f تطبيق ترابطي .

لكل $c_1 \in T_1$ ولكل $v \in V_1$ يوجد $c_2 \in T_1$ وحيد بحيث

$\omega(c_1, c_2) = v$ فأن : $c_1 + \omega(c_1, c_2) = c_2$

كذلك $f(c_1) = b + h(\omega(a, c_1))$

$$f(c_2) = b + h(\omega(a, c_2))$$

فأن :

$$f(c_2) - f(c_1) = h(\omega(a, c_2)) - h(\omega(a, c_1))$$

$$= h(\omega(a, c_2) - \omega(a, c_1))$$

$$= h(\omega(c_1, c_2))$$

فأن :

$$f(c_2) = f(c_1) + h(\omega(c_1, c_2))$$

اي ان : $f(c_1 + v) = f(c_1) + h(v)$

بهذا فأن f تطبيق ترابطي .

(و . هـ . م .)

3.3.6 نظرية

ليكن (T_1, V_1, ω_1) ، (T_2, V_2, ω_2) ، (T_3, V_3, ω_3) ثلاث فضاءات ترابطية . وليكن f_1 تطبيقاً ترابطياً من T_1 في T_2 و h_1 تطبيقاً خطياً مرتبطاً به ، f_2 تطبيقاً ترابطياً من T_2 في T_3 و h_2 تطبيقاً خطياً مرتبطاً به ، فأن $f_2 \circ f_1$ هو تطبيق ترابطي من T_1 في T_3 ، والتطبيق الخطي المرتبط به هو $h_2 \circ h_1$.

البرهان :

حسب النظرية (3.1.2) $h_2 \circ h_1$ هو تطبيق خطي من الفضاء V_1 في الفضاء V_3 .

لكل $a \in T_1$ ولكل $v \in V_1$ يوجد $b \in T_1$ بحيث $\omega(a,b) = v$ فأن $b = a + v$ و

$$(f_2 \circ f_1)(b) = (f_2 \circ f_1)(a+v)$$
$$= f_2(f_1(a+v))$$
$$= f_2(f_1(a) + h_1(v))$$

لكن $h_1(v) \in V_2$ ، $f_1(a) \in T_2$ فأن :

$$(f_2 \circ f_1)(b) = f_2(f_1(a)) + h_2(h_1(v))$$
$$= (f_2 \circ f_1)(a) + (h_2 \circ h_1)(v)$$

بهذا فأن : $(f_2 \circ f_1)(a+v) = (f_2 \circ f_1)(a) + (h_2 \circ h_1)(v)$

وبذلك فأن $f_2 \circ f_1$ هو تطبيق ترابطي من T_1 في T_3 و $h_2 \circ h_1$ هو التطبيق الخطي المرتبط به . (و.هـ.م.)

نظرية 4.3.6

ليكن (T_1, V_1, ω_1) ، (T_2, V_2, ω_2) فضاءين ترابطين وليكن f تطبيقاً ترابطياً من T_1 في T_2 ، h تطبيقاً خطياً مرتبطاً به فأن :

(1) f متباين $\Leftrightarrow$ h متباين

(2) f غامر $\Leftrightarrow$ h غامر

البرهان :

(1) لنفرض ان h متباين ، لكل $a, b \in T_1$ واذا كان $f(a) = f(b)$ كذلك $a = b + \omega_1(b, a)$ فأن :

$$f(a) = f(b) + h(\omega_1(b, a))$$

وبذلك فأن : $h(\omega_1(b, a)) = 0$

فأن : $\omega_1(b, a) \in Ker\, h$ ومنه $\omega_1(b, a) = 0_V$ اي ان

$a = b$ بهذا فأن f متباين .

لنفرض ان h غير متباين ، فأنه يوجد شعاع غير صفري $v \in V$ بحيث $h(v) = 0$ ، وليكن $a \in T_1$ فأنه يوجد $b \in T_1$ و $a \neq b$ بحيث $b = a + v$.

$$f(b) = f(a + v) = f(a) + h(v) = f(a)$$

ومنه نستنتج ان f غير متباين .

(2) لنفرض ان f غامر ، وليكن $v \in V_2$ فأذا كان $b \in T_1$ فأن : $f(b) + v \in T_2$ ، فأنه يوجد $a \in T_1$ بحيث $f(b) + v = f(a)$ ومنه فأن : $h(\omega_1(a, b)) = v$

بهذا فأن h غامر .

لنفرض الآن ان h غامر وليكن $a \in T_2$ فأذا كان $b \in T_1$

فأن $\omega_2(f(b), a) \in V_2$ ، وبهذا فأنه يوجد $v \in V_2$ ، بحيث

$f(b) + h(v) = a$ فأن : $h(v) = \omega_2(f(b), a)$

ليكن $a_1 = b + v$

فأن : $f(a_1) = f(b) + h(v)$ اي ان $h(v) = \omega_2(f(b), f(a_1))$

فأن $f(a_1) = a$ وبذلك فأن f غامر .

(و. هـ. م.)

5.3.6 تعريف

ليكن (T_1, V_1, ω_1) ، (T_2, V_2, ω_2) فضاءين ترابطيين ،
وليكن f تطبيقاً ترابطياً من T_1 في T_2 . نقول ان
f هو ايزومورفيزم فضاءات ترابطية اذا وجد تطبيق
ترابطي g من T_2 في T_1 بحيث :

$$g \circ f = Id_{T_2} \quad ، \quad f \circ g = Id_{T_1} .$$

وهذا يعني ان f تقابل ، من هنا ومن النظرية (4.3.6)
فأن التطبيق h المرافق لـ f ايضاً يكون تقابلاً .

6.3.6 نظرية

ليكن (T_1, V_1, ω_1) ، (T_2, V_2, ω_2) فضاءين ترابطيين ،
و f ايزومورفيزم فضاءات ترابطية من T_1 على T_2 ، فأن
f^{-1} هو ايضاً ايزومورفيزم فضاءات ترابطية من T_2 على
T_1 .

البرهان :

واضح ان $f \circ f^{-1} = Id$ ، $f^{-1} \circ f = Id_{T_1}$

نبرهن ان f^{-1} هو تطبيق ترابطي .

لكل $a \in T_2$ ولكل $v \in V_2$ ، فأنه يوجد $a_1 \in T_1$ و $v_1 \in V_1$

بحيث $f(a_1) = a$ ، $h(v_1) = v$

فأن :

$$f^{-1}(a+v) = f^{-1}(f(a_1) + h(v_1))$$
$$= f^{-1}(f(a_1 + v_1))$$
$$= (f^{-1} \circ f)(a_1 + v_1)$$
$$= a_1 + v_1 = f^{-1}(a) + h^{-1}(v)$$

بهذا فأن f^{-1} تطبيق ترابطي .

(و.هـ.م.)

تمـــــارين

(1) ليكن (T_n, V_n, ω_n) ، .... ، (T_1, V_1, ω_1)
فضاءات ترابطية ، لكل $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in T_1 \times \dots \times T_n$:

$$\omega((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = (\omega_1(a_1, b_1), \dots\dots, \omega_n(a_n, b_n))$$

برهن ان : $(T_1 \times \dots \times T_n, V_1 \times \dots \times V_n, \omega)$ هو فضاء ترابطي .

(2) ليكن (T, V, ω) فضاءً ترابطياً ، لكل $a, b, c \in T$
برهن ان : $\omega(a,b) + \omega(b,c) + \omega(c,a) = 0$.
ثم برهن انه لكل $a_1, \dots, a_n \in T$ فأن :

$$\omega(a_1, a_2) + \omega(a_2, a_3) + \dots + \omega(a_{n-1}, a_n) + \omega(a_n, a_1) = 0$$

مستنتجاً ان :

$$\omega(a_1, a_n) = \omega(a_1, a_2) + \dots + \omega(a_{n-1}, a_n)$$

(3) اوجد مركز ثقل مجموعة النقاط $(1,1,1)$ ، $(0,1,0)$ ،
$(2,0,1)$ في الفضاء الترابطي $\mathbb{R}^3$ ذي الأثقال 2 ، -1 ، 1
على التوالي .

(4) برهن ان النقطة $(0,0,0)$ هي مركز ثقل مجموعة النقاط
$(0,0,1)$ ، $(0,1,0)$ ، $(1,1,1)$ ، $(1,0,0)$ في الفضاء
الترابطي K^3 حيث K حقل .

(5) ليكن IR^2 فضاءً ترابطياً مرتبطاً بالفضاء الشعاعي IR^2 ، وليكن $g: IR^2 \to IR^2$ تطبيقاً معرفاً كالآتي :

$$\forall (x_1, x_2) \in IR^2 , \quad g(x_1, x_2) = (-x_1 - 1 , -x_2 + 1)$$

برهن ان g تطبيق ترابطي .

(6) برهن ان التطبيق الترابطي يحافظ على مركز الثقل .

(7) برهن ان صورة الفضاء الترابطي الجزئي وفق التطبيق الترابطي هو فضاء ترابطي جزئي .

فهرست الرموز

فهرست المواضيع

المصادر

Lectures in abstract algebra : N. Jacobson [1]

Algébre : M. Queysanne [2]

Algebra liniowa z geometria : A. Białynicki - Birula [3]

Algebra : Bolesław Gleichgewicht [4]

ب. بن زاغو : المدخل الى الجبر الخطي [5]

سيمور ليبشتز : الجبر الخطي [6]

Repetytorium z algebry Liniowej : H. Guściora . M. Sadowski [7]

Algebra liniowa : E. Stolarskiej [8]

Wektory i macierze : Mieczysław Warmus [9]

Algebra Liniowa : M. Stark . A. Mostowski [10]